Multiplikation und Teilung

von

Sigmaquotienten

INAUGURAL-DISSERTATION

zur Erlangung der Doktorwürde
der hohen philosophischen Fakultät der Universität Basel

vorgelegt von

Hans Stohler
aus Basel

Mit 17 Figuren

BASEL
Basler Druck- und Verlagsanstalt
1911

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41546707_0061

Multiplikation und Teilung

von

Sigmaquotienten

INAUGURAL-DISSERTATION

zur Erlangung der Doktorwürde
der hohen philosophischen Fakultät der Universität Basel

ACAD.
LUGD.BAT.
BIBL.

vorgelegt von

Hans Stohler
aus Basel

Mit 17 Figuren

BASEL
Basler Druck- und Verlagsanstalt
1911

Genehmigt von der mathematisch-naturwissenschaftlichen Abteilung der philosophischen Fakultät auf Antrag der Herren Professoren Dr. Fueter und Von der Mühll.

Basel, den 14. Dezember 1911.

John Meier,
Dekan.

Vorwort.

Im III. Band seiner Algebra § 155 schreibt H. Weber: „Für den Nachweis der Existenz des Teilungskörpers ist die Benützung der Weierstrass'schen Funktion und der daraus abgeleiteten τ Funktion sehr zweckmässig, und es wäre am bequemsten, wenn man darauf auch die weitere Untersuchung dieses Körpers gründen könnte. Dafür aber ist die arithmetische Natur der Multiplikationsformeln noch nicht genügend bekannt, und es ist darum zurzeit noch notwendig, die komplexe Multiplikation und Teilung auch der Jacobi'schen elliptischen Funktionen zu betrachten."

Darauf hinweisend, stellte mir Herr Prof. Dr. R. Fueter die Aufgabe, gestützt auf die Quotienten der Weierstrass'schen Sigmafunktionen ähnliche Beziehungen herzuleiten, wie sie allgemein für die Jacobi'schen elliptischen Funktionen bekannt sind. Zuerst sind die elementaren funktionentheoretischen Eigenschaften der Sigmaquotienten zu entwickeln, dann die algebraischen und dabei soll speziell untersucht werden, ob sich einfache Transformationsgleichungen wenigstens für die niedrigsten Fälle herleiten lassen, welche dann bei der komplexen Multiplikation die Berechnung von Klasseninvarianten ermöglichen.

Inhaltsangabe.

Seite

Vorwort 3
Inhaltsangabe 4
Einführung 5
Ueberblick und Definitionen 8

I. Teil:

Funktionentheorie.

§ 1. Definition der $\mathfrak{S}$-Funktionen 11
§ 2. Die Perioden der Funktion $\mathfrak{S}$ 14
§ 3. Nullpunkte, Pole, Verzweigungspunkte 16
§ 4. Differentialgleichung und Integral 19
§ 5. Abbildung der u-Ebene auf die zweiblätterige Riemann'sche Fläche der $\mathfrak{S}$-Funktion 21
§ 6. Entwicklung von $\mathfrak{S}$ in eine Potenzreihe 25
§ 7. Der Differentialquotient $\mathfrak{S}'$ 26
§ 8. Die Funktion S 31

II. Teil:

Algebra.

1. Addition und Multiplikation.

§ 9. Addition der Funktionen $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{S}'$ 37
§ 10. Multiplikation der Funktionen $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{S}'$ 39
§ 11. Herleitung der Multiplikationsformeln mit Hilfe der Potenzreihen 47
§ 12. Addition und Multiplikation der Funktionen $S(u)$ und $S'(u)$ 49
§ 13. Darstellung des Multiplikationstheorems durch die Nullstellen der Funktion $R(S) - S(nw)$ 54

2. Teilung.

§ 14. Allgemeines 56
§ 15. Die Teilung durch 2 57
§ 16. Die Teilung durch Potenzen von 2 62
§ 17. Die Teilung durch ungerade Primzahlen 65
§ 18. Zurückführung der speziellen Teilungsgleichung auf Transformationsgleichungen 72
§ 19. Darstellung der Wurzeln der Transformationsgleichung durch unendliche Produkte 75
§ 20. Die Transformationsgleichung für $n = 3$ 80

Schlusswort 84
Curriculum vitae 86

Einführung.

Den Ausgangspunkt meiner Arbeit bilden die vier Weierstrass'schen Sigmafunktionen. Ihre elementaren Eigenschaften sind in allen Lehrbüchern über die elliptischen Funktionen ausgeführt, worunter ich folgende benützt habe:

G. H. Halphen. „Traité des fonctions elliptiques et de leurs applications I." Paris 1886.

K. Weierstrass. „Formeln und Lehrsätze zum Gebrauch der elliptischen Funktionen." Herausgegeben von H. A. Schwarz, Berlin 1893.

J. Tannery et J. Molk. „Eléments de la théorie des fonctions elliptiques" Paris 1893—1902.

Klein-Fricke: „Elliptische Modulfunktionen", Leipzig 1890—92.

H. Burkhardt: „Elliptische Funktionen." Leipzig 1906.

H. Weber: „Lehrbuch der Algrebra I., II., III." Braunschweig I. 1898, II. 1899 und III. 1908.

Bei den aus diesen Lehrbüchern entnommenen Formeln habe ich mich bemüht, nur die beiden letztern zu gebrauchen und in den Fussnoten ist unter „Burkhardt" das Lehrbuch: Elliptische Funktionen und unter „Weber I., II., oder III." der betreffende Band seiner Algebra verstanden.

Die Bezeichnungsart der grundlegenden Perioden der Weierstrass'schen p-Funktion mit einem der beiden Werke in Einklang zu bringen, erwies sich als unzweckmässig, weil keine in übersichtlicher Weise und einheitlich die ganze Arbeit hindurch zu verwenden war. Daher entschloss ich mich, die für diese Arbeit vorteilhaften Eigenschaften von beiden zu vereinigen und wählte als Perioden der p-Funktion

$$\omega_1 \text{ und } \omega_3,$$

wobei

$$\omega_1 + \omega_3 = \omega_2.$$

Ist dann die einfache Funktion $\sigma(u)$ gegeben, so sind die Sigmafunktionen mit Index definiert durch die Gleichung:

$$\sigma_\alpha(u) = \frac{e^{-\eta_\alpha u} \cdot \sigma\left(u + \frac{\omega_\alpha}{2}\right)}{\sigma\left(\frac{\omega_\alpha}{2}\right)}$$

$$\alpha = 1, 2, 3.$$

Gestützt darauf lassen sich die Bezeichnungen der angegebenen Lehrbücher in die hier gebrauchte übersetzen.

Für die genaue Literaturangabe wird der bezügliche Teil der „Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften II. 3. B. 3" das beste Hilfsmittel werden. Da aber dieser Teil erst unter der Presse ist, so musste ich mich auf die Angaben im schon erschienenen Abschnitt: „Komplexe Multiplikation von H. Weber" I. C. 6., das „Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik" und die Literaturnachweise in den angegebenen Lehrbüchern stützen. Diese haben mich zur Durchsicht und zum teilweisen Studium der einschlägigen Stellen verschiedener Quellen geführt:

Grundlegend sind:

N. H. Abel: „Oeuvres complètes, nouvelle édition, publiés par L. Sylow et S. Lie", Christiania 1881—91, speziell „Recherches sur les fonctions elliptiques", p. 263.

C. G. J. Jacobi: „Gesammelte Werke". Berlin 1881—91.

— Fundamenta nova theoriae functionum ellipticarum. I. B., p. 49.

— Suite des notices sur les fonctions elliptiques I. Bd., p. 266.

Von diesen Meisterwerken ausgehend, suchte ich die bezüglichen Arbeiten in den mathematischen Jahrbüchern und andern Publikationen.

Zur elementaren Einführung in die Theorie und Geschichte dient:

A. Enneper: „Elliptische Funktionen", Halle a. S. II. Aufl. 1898, neu bearbeitet von Felix Müller. Der Verfasser hat darin die Theorie nach ihrer geschichtlichen Entwicklung aufgebaut und jeweils zuerst einen Überblick über die Geschichte gegeben, den er durch zahlreiche Literaturangaben erweitert hat, durchgeführt bis 1888.

Eine Ergänzung dazu gibt F. Klein 1885 im 26. Band der Mathematischen Annalen: „Neue Untersuchungen auf dem Gebiete der elliptischen Funktionen", worin er die Arbeiten von Hurwitz, Fricke, Biedermann, Molien und Engel bespricht.

Diese beiden Arbeiten entheben mich der Aufgabe, viel Literatur anzugeben, und es sollen nur diejenigen Abhandlungen, die speziell die Transformation behandeln, genannt werden:

Sohncke: „Aequationes modulares pro transformatione functionum ellipticarum". Journal f. Math. 16 (1837).

Schlaefli: „Zur Theorie der elliptischen Modularfunctionen". Journal f. Math. 72 (1870).

Klein: Math. Annalen 14 und 15 (1878—79).

Kiepert: Journal f. Math. 87, 88, 95 Math. Annalen 26, 32, 37 (1879, 1880, 1883) (1885, 1888, 1890).

R. Fricke: „Kurzgefasste Vorlesungen über verschiedene Gebiete der höheren Mathematik." Analytisch-funktionentheoretischer Teil. Leipzig 1900.

Für mich waren bestimmend die Arbeiten von H. Weber und L. Kiepert. Vom ersteren speziell der III. Band seiner Algebra, vom letztern die Abhandlung im 87. Band des Journals für Mathematik, wo er einfache Transformationsgleichungen mit Hilfe der Funktion σ herleitet.

Ueberblick und Definitionen.

I. Funktionentheoretischer Teil.

Er behandelt den ungeraden Sigmaquotienten

$$\mathfrak{S}_{03}(u) = \frac{\sigma(u)}{\sigma_3(u)} = \mathfrak{S}(u),$$

der die Perioden ω_1 und ω_3 hat und in den Verzweigungspunkten die Werte ε_1 und ε_2 annimmt. ε_1 und ε_2 werden durch unendliche Produkte als Funktionen des Periodenverhältnisses dargestellt, und in der Potenzreihenentwicklung wird $\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 = \mathfrak{s}$, $\varepsilon_1^2 \cdot \varepsilon_2^2 = \mathfrak{p}$ gesetzt.

Nachdem $\mathfrak{S}$ auf der Riemannschen Fläche dargestellt worden ist, gehen wir über zu

$$\mathfrak{S}_{13}(u) = \sqrt{1 - \frac{\mathfrak{S}^2(u)}{\varepsilon_1^2}} = \mathfrak{C}(u); \quad \mathfrak{S}_{23}(u) = \sqrt{1 - \frac{\mathfrak{S}^2(u)}{\varepsilon_2^2}} = \mathfrak{D}(u)$$

und finden

$$\mathfrak{S}'(u) = \mathfrak{C}(u) \cdot \mathfrak{D}(u).$$

Nun suchen wir eine Funktion, deren Potenzreihenentwicklung nur noch von einem Parameter

$$a = \frac{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2}{\varepsilon_1 \varepsilon_2}$$

abhängig ist, und erhalten, indem wir $w = \frac{u}{\sqrt{\varepsilon_1 \varepsilon_2}}$ setzen, die gerade Funktion

$$\mathrm{S}(w) = \mathfrak{S}^2(w) = \frac{\mathfrak{S}^2(u)}{\varepsilon_1 \varepsilon_2}$$

mit den Perioden ω_{I} und ω_{III}, wobei $\omega_{\mathrm{I}} + \omega_{\mathrm{III}} = \omega_{\mathrm{II}}$ ist und

$$\omega_{\mathrm{I}} = \frac{\omega_1}{\sqrt{\varepsilon_1\,\varepsilon_2}}, \qquad \omega_{\mathrm{III}} = \frac{\omega_3}{\sqrt{\varepsilon_1\,\varepsilon_2}}.$$

Sie nimmt in der Verzweigungspunkten $\frac{\omega_{\mathrm{I}}}{2}$ und $\frac{\omega_{\mathrm{II}}}{2}$ die Werte ε_{I} und $\varepsilon_{\mathrm{II}}$ an, deren Summe $\varepsilon_{\mathrm{I}} + \varepsilon_{\mathrm{II}} = a$ und deren Produkt $\varepsilon_{\mathrm{I}} \,.\, \varepsilon_{\mathrm{II}} = 1$ ist.

II. Algebraischer Teil.

1. Multiplikation.

Uebergehend von den Sigmafunktionen zu den $\mathfrak{S}$-Funktionen und von diesen zur Funktion S, leiten wir zuerst das Additions- und Multiplikationstheorem der speziellen Funktion $\mathfrak{S}$

$$\mathfrak{S}(u+v) = \frac{\mathfrak{S}\,u\,\mathfrak{S}'\,v + \mathfrak{S}\,v\,\mathfrak{S}'\,u}{1 - \dfrac{\mathfrak{S}^2\,u\,\mathfrak{S}^2\,v}{\varepsilon_1^{\,2}\,\varepsilon_2^{\,2}}},$$

$$\mathfrak{S}(n\,u) = \mathfrak{S}\,.\,\mathfrak{S}'\,.\,\mathrm{R}(\mathfrak{S}^2), \quad n \text{ gerade};$$

$$= \mathfrak{S}\,.\,\mathrm{R}(\mathfrak{S}^2), \qquad n \text{ ungerade};$$

dann dasselbe für die S-Funktion her

$$\mathrm{S}(w_1 + w_2) = \frac{(\mathrm{S}\,w_1\,\mathrm{S}'\,w_2 + \mathrm{S}\,w_2\,\mathrm{S}'\,w_1)^2}{4\,\mathrm{S}\,w_1\,\mathrm{S}\,w_2\,(1 - \mathrm{S}\,w_1\,\mathrm{S}\,w_2)^2}$$

$$\mathrm{S}(n\,w) = \mathrm{S} \cdot \frac{P(\mathrm{S})}{Q(\mathrm{S})}.$$

Die Eigenschaften der Funktionen R, P, Q werden dargelegt und ihre expliziten Werte für $n = 1$ bis 5 in Tabellen angegeben. An einem Beispiel wird gezeigt, wie mit Hilfe der Potenzreihenentwicklung dieselben Werte R gefunden werden können, wenn n ungerade ist.

In den Ableitungen und Beispielen ist unter a und b das Quadrat ε_1^2 und ε_2^2 verstanden, $\mathfrak{p}$ ist das Produkt, $\mathfrak{s}$ die Summe von a und b, $s(u) = \frac{\mathfrak{S}(u)}{\sqrt{\varepsilon_1 \varepsilon_2}}$ und R, p, q, P, Q bedeuten rationale Funktionen mit den Koeffizienten p_1, p_2, . . . P_1, P_2, . . .

2. Teilung.

Es wird bewiesen, dass sowohl die spezielle als auch die allgemeine Teilung durch Potenzen von 2 lösbar ist, und ihre Durchführung an Beispielen erläutert.

Für ungerade n ist die spezielle Teilungsgleichung im Körper der rationalen Zahlen und rationalen Funktionen von ε_{I} und $\varepsilon_{\mathrm{II}}$ direkt nicht lösbar. Durch den Umweg über die $\mathfrak{S}$-Funktion gelingt es uns aber nachzuweisen, dass die Periodenteilwerte der Funktion $\mathfrak{S}$ und daraus diejenigen von S in einem rationalen Körper gefunden werden können.

Ist die spezielle Teilung für ungerade n gelöst, so kann die allgemeine Teilung der Funktion $\mathfrak{S}$ immer durchgeführt werden.

Bei der speziellen Teilung treten wir näher an die Auflösung heran, indem wir die Wurzeln β_0 bis β_n von Transformationsgleichungen, die je das Produkt derselben Anzahl von Wurzeln der Teilungsgleichung sind, durch unendliche Produkte darstellen. Darin ist

$$z = e^{\frac{u}{\omega_1}\pi i} = e^{\frac{w}{\omega_{\mathrm{I}}}\pi i}; \quad h = e^{\frac{\omega_3}{\omega_1}\pi i} = e^{\frac{\omega_{\mathrm{III}}}{\omega_{\mathrm{I}}}\pi i}; \quad \delta = e^{\frac{2\pi i}{n}}.$$

Zum Schluss wird die Transformationsgleichung für $n = 3$ vollständig gelöst.

Das Schlusswort zeigt was erreicht worden ist, und in welcher Richtung die Arbeit weiter ausgebaut werden kann.

Erster Teil.

Funktionentheorie.

§ 1.

Definition der ℭ-Funktionen.

Die einfache Funktion $\sigma(u)$ ist definiert durch die Reihe[1])

1) $$\sigma(u) = u - \frac{g_2 u^5}{2^4 . 3 . 5} - \frac{g_3 u^7}{2^3 . 3 . 5 . 7} - \frac{g_2^2 u^9}{2^9 . 3^2 . 5 . 7} - \frac{g_2 g_3 . u^{11}}{2^7 . 3^2 . 5^2 . 7 . 11} - \cdots,$$

worin g_2 und g_3 die erste und zweite Invariante sind des elliptischen Differentials in der Weierstrass'schen Normalform[2]):

$$du = \frac{dz}{\sqrt{4 z^3 - g_2 z - g_3}}$$

oder durch das Produkt[3])

2) $$\sigma(u) = u . \prod_w{}' \left\{ \left(1 - \frac{u}{w}\right) e^{\frac{u}{w} + \frac{1}{2} \cdot \frac{u^2}{w^2}} \right\}.$$

Benützen wir die in der Einführung zu Grunde gelegte Bezeichnung, so ergibt sich für die Sigmafunktionen mit Index[4]) [5]):

[1]) K. Weierstrass-Schwarz: Formeln und Lehrsätze zum Gebrauch der elliptischen Funktionen Art. 18; 6).

[2]) Weber III. § 5.

[3]) Burkhardt § 20, 3).

[4]) Burkhardt § 30, 1), 2), 3).

[5]) Vergleiche auch die Definitionen durch unendliche Produkte. S. 76.

$$\sigma_1(u) = -\frac{e^{\eta_1 u}\sigma\left(u - \frac{\omega_1}{2}\right)}{\sigma\left(\frac{\omega_1}{2}\right)} = \frac{e^{\eta_1 u}\sigma\left(u + \frac{\omega_1}{2}\right)}{\sigma\left(\frac{\omega_1}{2}\right)},$$

3)
$$\sigma_2(u) = -\frac{e^{\eta_2 u}\sigma\left(u - \frac{\omega_2}{2}\right)}{\sigma\left(\frac{\omega_2}{2}\right)} = \frac{e^{\eta_2 u}\sigma\left(u + \frac{\omega_2}{2}\right)}{\sigma\left(\frac{\omega_2}{2}\right)},$$

$$\sigma_3(u) = -\frac{e^{\eta_3 u}\sigma\left(u - \frac{\omega_3}{2}\right)}{\sigma\left(\frac{\omega_3}{2}\right)} = \frac{e^{-\eta_3 u}\sigma\left(u + \frac{\omega_3}{2}\right)}{\sigma\left(\frac{\omega_3}{2}\right)}.$$

Nachdem wir so die Sigmafunktionen in allgemeiner Weise festgelegt haben, gehen wir über zur Definition der $\mathfrak{S}$-Funktionen.

Die 4 Sigmafunktionen ergeben durch Division 12 verschiedene $\mathfrak{S}$-Funktionen. Da σu eine ungerade, $\sigma_1 u$, $\sigma_2 u$ und $\sigma_3 u$ gerade Funktionen des Argumentes u sind, so werden die $\mathfrak{S}$-Funktionen, welche σu enthalten, ungerade und diejenigen, in denen σu nicht vorkommt, gerade Funktionen von u sein.

Es sind

$$\frac{\sigma}{\sigma_1}, \frac{\sigma_1}{\sigma}, \frac{\sigma}{\sigma_2}, \frac{\sigma_2}{\sigma}, \frac{\sigma}{\sigma_3}, \frac{\sigma_3}{\sigma} \quad \text{ungerade } \mathfrak{S}\text{-Funktionen}$$

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2}, \frac{\sigma_2}{\sigma_1}, \frac{\sigma_1}{\sigma_3}, \frac{\sigma_3}{\sigma_1}, \frac{\sigma_2}{\sigma_3}, \frac{\sigma_3}{\sigma_2} \quad \text{gerade } \mathfrak{S}\text{-Funktionen}$$

oder kürzer

$\mathfrak{S}_{0\alpha}(u)$ und $\mathfrak{S}_{\alpha 0}(u)$ sind ungerade, $\mathfrak{S}_{\beta\gamma}(u)$ gerade Funktionen des Argumentes u, worin $\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3$ und für die einfache Sigmafunktion der Index 0 gewählt ist.

Jede der 12 $\mathfrak{S}$-Funktionen lässt sich durch jede andere ausdrücken, wenn man noch die Weierstrass'sche p-Funktion und deren Werte für die halben Perioden[1]) $p\frac{\omega_1}{2} = e_1$, $p\frac{\omega_2}{2} = e_2$ und

[1]) Um den Druck zu vereinfachen, wird das Argument bei den hier gebrauchten Funktionen nur in den Fällen, wo Verwechslungen leicht möglich sind, in Klammern gesetzt.

$p\,\frac{\omega_3}{2} = e_3$ einführt[1]). Dazu dienen die einfachen Relationen

$$\mathfrak{S}_{\alpha o} = \frac{1}{\mathfrak{S}_{o\alpha}},$$

4)
$$\mathfrak{S}_{\beta\gamma} = \frac{\mathfrak{S}_{\beta o}}{\mathfrak{S}_{\gamma o}} = \frac{\mathfrak{S}_{o\gamma}}{\mathfrak{S}_{o\beta}} = \frac{\mathfrak{S}_{\beta\alpha}}{\mathfrak{S}_{\gamma\alpha}} = \frac{\mathfrak{S}_{\alpha\gamma}}{\mathfrak{S}_{\alpha\beta}}$$
$$= \mathfrak{S}_{\beta o} \cdot \mathfrak{S}_{o\gamma} = \mathfrak{S}_{\beta\alpha} \cdot \mathfrak{S}_{\alpha\gamma}$$

und der wichtige Zusammenhang zwischen der $\mathfrak{S}$-Funktion und der p-Funktion[2])

5)
$$\mathfrak{S}_{o\alpha}\, u = \frac{1}{\sqrt{p\,u - e_\alpha}}, \quad \alpha = 1, 2, 3,$$

woraus

6)
$$p\,u = e_\alpha + \mathfrak{S}^2_{\alpha o} = e_\beta + \mathfrak{S}^2_{\beta o} = e_\gamma + \mathfrak{S}^2_{\gamma o}$$

und da[3])

7)
$$e_\alpha + e_\beta + e_\gamma = 0,$$
$$3\,p\,u = \mathfrak{S}^2_{\alpha o} + \mathfrak{S}^2_{\beta o} + \mathfrak{S}^2_{\gamma o}.$$

Aus 6) folgt weiter

$$\mathfrak{S}^2_{\alpha o} - \mathfrak{S}^2_{\gamma o} = - e_\alpha + e_\gamma,$$

$$\mathfrak{S}^2_{\alpha o}\,(1 - \mathfrak{S}^2_{\gamma\alpha}) = - e_\alpha + e_\gamma,$$

8)
$$\mathfrak{S}^2_{\alpha o} = \frac{e_\gamma - e_\alpha}{1 - \mathfrak{S}^2_{\gamma\alpha}}$$

und unter Berücksichtigung von 6)

9)
$$p\,u = e_\alpha + \frac{e_\gamma - e_\alpha}{1 - \mathfrak{S}^2_{\gamma\alpha}} = e_\beta + \frac{e_\alpha - e_\beta}{1 - \mathfrak{S}^2_{\alpha\beta}} = e_\gamma + \frac{e_\beta - e_\gamma}{1 - \mathfrak{S}^2_{\beta\gamma}}.$$

[1]) Burkhardt § 18, 11).
[2]) ib. § 30, 5).
[3]) ib. § 18, 12).

Die Gleichungen 4) bis 9) lassen jede $\mathfrak{S}$-Funktion in jede der 11 andern überführen; sind beliebige Eigenschaften für eine $\mathfrak{S}$-Funktion hergeleitet, so kann durch sie die Betrachtung auf alle übrigen ausgedehnt werden.

In dieser Arbeit soll daher nur eine $\mathfrak{S}$-Funktion speziell untersucht werden, und wir dürfen diese beliebig wählen. Es sei

$$10) \qquad \mathfrak{S}(u) = \frac{\sigma u}{\sigma_3 u}.$$

Im Folgenden ist unter $\mathfrak{S}(u)$ ohne Indices stets dieser Quotient verstanden und wenn Zweideutigkeit ausgeschlossen ist, wird auch das Argument u weggelassen, also gesetzt:

$$\mathfrak{S} = \frac{\sigma}{\sigma_3}.$$

Die nächsten Paragraphen behandeln die funktionentheoretischen Eigenschaften dieser speziellen Funktion $\mathfrak{S}$, und nur zur Abkürzung und übersichtlichen Darstellung werden später noch die Funktionen $\mathfrak{S}_{13}$ und $\mathfrak{S}_{23}$ verwendet.

§ 2.

Die Perioden der Funktion $\mathfrak{S}$.

Vermehrt man bei einer Funktion das Argument um eine Periode, so nimmt sie wieder denselben Wert an, und man sagt, die Funktion ist periodisch. Hat die Funktion 2 von einander unabhängige Perioden, deren Quotient also einen von 0 verschiedenen imaginären Bestandteil hat, so heisst sie doppelt periodisch oder elliptisch. Trägt man die beiden Perioden als Seiten eines Parallelogramms in der complexen Ebene auf, so erhält man das Fundamentalperiodenparallelogramm.

Nun sollen die Perioden der $\mathfrak{S}$-Funktion gefunden und ihr Periodenparallelogramm gezeichnet werden.

Die Theorie der Sigmafunktionen lehrt[1])

$$\sigma(u + \omega_\alpha) = -\, e^{\eta_\alpha (2u + \omega_\alpha)}\, \sigma u$$

$$\sigma_\alpha(u + \omega_\alpha) = -\, e^{\eta_\alpha (2u + \omega_\alpha)}\, \sigma_\alpha u$$

$$\sigma_\alpha(u + \omega_\beta) = +\, e^{\eta_\beta (2u + \omega_\beta)}\, \sigma_\alpha u$$

[1]) Burkhardt § 20, 6), 7) und § 30, 7) 8).

Bildet man die Funktion $\mathfrak{S} \frac{\sigma}{\sigma_3}$, so heben sich die Exponentialfunktionen fort, und es bleibt

$$\mathfrak{S}(u + \omega_1) = -\mathfrak{S}(u)$$

1) $$\mathfrak{S}(u + 2\omega_1) = \mathfrak{S}(u)$$

$$\mathfrak{S}(u + \omega_3) = \mathfrak{S}(u)$$

d. h. $\mathfrak{S}$ ändert sich nicht, wenn man das Argument u vermehrt um $2\omega_1$ oder ω_3 die $\mathfrak{S}$-Funktion hat also die beiden Perioden $2\omega_1$ und ω_3.

Während die Sigmafunktionen ganz und transzendent sind, werden ihre Quotienten doppeltperiodisch, und zwar nimmt $\mathfrak{S}$ analog der Sinusamplitude bei der Vermehrung des Argumentes um ω_1 zuerst den entgegengesetzten Wert an und geht erst bei Vermehrung um $2\omega_1$ in sich selbst über.

Tragen wir $2\omega_1$ und ω_3 in der complexen Ebene graphisch auf, so stellen die Verbindungsstrecken mit dem Anfangspunkt die Perioden nach Grösse und Richtung dar, und zeichnet man über ihnen das Parallelogramm, so entsteht das Periodenparallelogramm. Die Figur 1 stellt dieses Parallelogramm geometrisch dar und

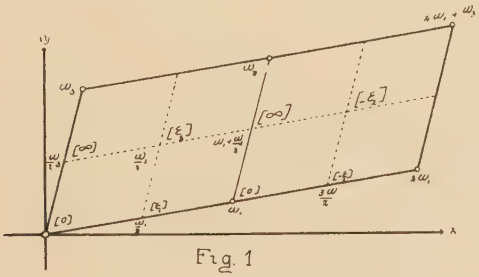

Fig. 1

und zugleich sind die Funktionswerte für spezielle Punkte, auf die wir im nächsten Paragraphen näher eintreten werden, in eckigen Klammern beigefügt.

An dieses Fundamentalperiodenparallelogramm können nach allen Richtungen ihm kongruente Parallelogramme angefügt werden. Die Funktion $\mathfrak{S}$ nimmt als Quotient zweier ganzer transzendenten Funktionen alle möglichen complexen Werte an. Da sie aber für

entsprechende Punkte u in den verschiedenen Parallelogrammen immer wieder denselben Wert annimmt, so muss $\mathfrak{S}$ schon für alle u eines Parallelogramms eine complexe Ebene wenigstens einmal überdecken.

Wieviel mal die $\mathfrak{S}$-Ebene überdeckt wird, entscheidet die Betrachtung spezieller Werte.

§ 3.

Nullpunkte, Pole, Verzweigungspunkte.

Für spezielle Werte des Argumentes u nimmt auch die Funktion $\mathfrak{S}$ ausgezeichnete Werte an. Funktionentheoretisch sind ihre Nullpunkte und Pole und die Verzweigungspunkte ihrer inversen Funktion wichtig.

Aus der Theorie der Sigmafunktionen folgt

$$\sigma\, u \text{ wird } 0 \text{ für } u = 0,\ \infty \text{ für } u = \infty\ ^{1});$$

$$\sigma_3\, u \text{ wird } 0 \text{ für } u = \frac{\omega_3}{2},\ \infty \text{ für } u = \infty\ ^{2}).$$

Werden diese Werte in die Funktion $\mathfrak{S} = \frac{\sigma}{\sigma_3}$ eingesetzt, so erhält man

1)
$$\begin{aligned} &\text{Nullpunkte bei } 0 \text{ und } \omega_1 \\ &\text{Pole} \qquad\quad \text{bei } \frac{\omega_3}{2} \text{ und } \omega_1 + \frac{\omega_3}{2} \end{aligned}$$

Dabei ist hervorzuheben, dass nur der untere und der linke Rand zum Periodenparallelogramm gezählt werden und es fallen daher die Punkte $2\omega_1$ und ω_3 schon in die Nachbarparallelogramme.

Aus der Eindeutigkeit der Sigmafunktionen folgt direkt, dass Nullpunkte und Pole einfach sind, d. h. den Punkten $u=0$, ω_1, $\frac{\omega_3}{2}$, $\omega_1 + \frac{\omega_3}{2}$ der u-Ebene entspricht nur je ein Punkt der $\mathfrak{S}$-Ebene. Die Funktion $\mathfrak{S}$ besitzt somit im Periodenparallelogramm zwei einfache Nullpunkte und zwei einfache Pole; sie ist nach dem dritten Liouvilleschen Satz[3]) eine elliptische Funktion II. Ordnung.

[1]) Vergl. § 1, 1), 2) oder Burkhardt § 20.
[2]) Vergl. § 1, 3) oder Burkhardt § 30.
[3]) Burkhardt § 15.

Sind zwei Nullpunkte und zwei Pole vorhanden, so werden auch alle andern Punkte doppelt vorkommen. Damit ist die am Schluss des letzten Paragraphen gestellte Frage gelöst. Während das Argument u einmal das Periodenparallelogramm durchläuft, überdecken die Funktionswerte $\wp$ die $\wp$-Ebene zweifach oder, wenn man sich die $\wp$-Ebene aus zwei aufeinander gelegten Blätter bestehend denkt, so wird jedes Blatt einfach überdeckt.

In der Darstellung von u als Funktion von $\wp$,

$$u = \mathrm{f}(\wp)$$

wird daher voraussichtlich eine Quadratwurzel vorkommen, von der die $+\sqrt{}$ und die $-\sqrt{}$ je eines der Blätter erfüllen. Die $+\sqrt{}$ und die $-\sqrt{}$ heissen die beiden Zweige der Quadratwurzel. Wird der Radikand null, so fallen die beiden Zweige zusammen oder umgekehrt, in dieser Stelle verzweigt sich die Wurzel in einen $+$ Ast und einen $-$ Ast. Wir haben einen Verzweigungspunkt. In den Verzweigungspunkten hangen die beiden Blätter der $\wp$-Ebene miteinander zusammen. In ihnen hat $\wp(u)$ bestimmte endliche Werte, und nur bei Ausartungen fallen sie mit den Nullpunkten oder Polen zusammen. Die beiden nächsten Paragraphen werden diese Verhältnisse weiter darlegen.

Hier sei vorausgegriffen und als schon bekannt angenommen, dass für die Stellen

$$2) \qquad u = \frac{\omega_1}{2}, \quad \frac{3\omega_1}{2}, \quad \frac{\omega_1 + \omega_3}{2} = \frac{\omega_2}{2}, \quad \frac{\omega_2}{2} + \omega_1$$

die Funktion $\wp$ Verzweigungspunkte hat.

Da die entsprechenden Funktionswerte in Zukunft fortwährend gebraucht werden, führen wir einfache Bezeichnungen ein, indem wir setzen

$$3) \qquad \wp\left(\frac{\omega_1}{2}\right) = \varepsilon_1, \quad \wp\left(\frac{\omega_2}{2}\right) = \varepsilon_2;$$

dann ist nach § 2, 1)

$$\wp\left(\frac{3\omega_1}{2}\right) = -\varepsilon_1, \quad \wp\left(\frac{\omega_2}{2} + \omega_1\right) = -\varepsilon_2.$$

Die Theorie der Sigmafunktionen erlaubt ε_1 und ε_2 auszudrücken durch unendliche Produkte.

Wenn gesetzt wird

$$h = e^{\frac{\omega_3}{\omega_1}\pi i} = e^{\omega \pi i} \text{ und}$$

$$H_{2\nu} = \prod_{\nu=1}^{\infty} \left(1 + h^{2\nu}\right) \qquad H_{(2\nu)} = \prod_{\nu=1}^{\infty} \left(1 - h^{2\nu}\right)$$

4)

$$H_{2\nu-1} = \prod_{\nu=1}^{\infty} \left(1 + h^{2\nu-1}\right) \qquad H_{(2\nu-1)} = \prod_{\nu=1}^{\infty} \left(1 - h^{2\nu-1}\right),$$

wobei die Beziehung

$$4^a) \qquad H_{2\nu} \cdot H_{2\nu-1} \cdot H_{-(2\nu-1)} = 1$$

besteht, so wird [1])

$$\varepsilon_1 = \frac{\omega_1}{\pi} \cdot \frac{1}{H^2_{2\nu} \cdot H^4_{2\nu-1}}$$

5)

$$\varepsilon_2 = \frac{\omega_1}{4\pi} \cdot \frac{h^{-\frac{1}{2}}}{H^2_{2\nu} \cdot H^4_{2\nu}}.$$

Die Produkte 3) konvergieren, solange $h < 1$ oder solange der imaginäre Bestandteil des Periodenverhältnisses $\frac{\omega_3}{\omega_1} = \omega$ positiv ist, was immer vorausgesetzt werden darf [2]).

Damit sind die Funktionswerte ε_1 und ε_2 in den Verzweigungspunkten $\frac{\omega_1}{2}$ und $\frac{\omega_2}{2}$ als eindeutige Funktionen der Perioden bestimmt.

Eine Darstellung durch e_1, e_2 und e_3 ergibt die Beziehung § 1, 5). Setzt man dort

[1]) Burkhardt § 32, 13). ε_2 hat im Gegensatz zu dort das positive Zeichen, weil wir nicht wie Burkhardt § 12, 1) $\omega_1 + \omega_3 = -\omega_2$ gesetzt haben.

[2]) ib. § 14, 2).

$$u = \frac{\omega_1}{2}, \quad \frac{\omega_2}{2},$$

so wird

6)
$$\varepsilon_1 = \frac{1}{\sqrt{e_1 - e_3}},$$

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{\sqrt{e_2 - e_3}},$$

worin die Zweideutigkeit der Wurzel durch die eindeutige Definition der ε als Sigmaquotienten aufgehoben ist.

§ 4.

Differentialgleichung und Integral.

Zuerst sei die Differentialgleichung der Funktion $\mathfrak{S}(u)$ hergeleitet und dann durch Umkehrung das Integral gebildet.

Wir verwenden § 1, 5) und die Gleichung[1])

$$p'(u) = -2 \cdot \frac{\sigma_1 u \, \sigma_2 u \, \sigma_3 u}{\sigma^3 u} = -2 \cdot \mathfrak{S}_{10} \cdot \mathfrak{S}_{20} \cdot \mathfrak{S}_{30},$$

woraus

$$\mathfrak{S}'(u) = -\frac{p'(u)}{2\sqrt{(p u - e_3)^3}} = \frac{1}{\mathfrak{S}_{01} \cdot \mathfrak{S}_{02} \cdot \mathfrak{S}_{03}} \cdot \mathfrak{S}_{03}^3,$$

1)
$$\mathfrak{S}'(u) = \frac{\mathfrak{S}_{03}^2}{\mathfrak{S}_{01} \mathfrak{S}_{02}}.$$

Die Gleichung § 1, 6) lässt $\mathfrak{S}_{01}$ und $\mathfrak{S}_{02}$ durch $\mathfrak{S}_{03}$ ausdrücken und man erhält

$$\frac{1}{\mathfrak{S}_{01}} = \sqrt{\frac{1}{\mathfrak{S}_{03}^2} - (e_1 - e_3)},$$

$$\frac{1}{\mathfrak{S}_{02}} = \sqrt{\frac{1}{\mathfrak{S}_{03}^2} - (e_2 - e_3)}$$

und

$$\mathfrak{S}'(u) = \sqrt{[1 - (e_1 - e_3)\,\mathfrak{S}_{03}^2]\,[1 - (e_2 - e_3)\,\mathfrak{S}_{03}^2]}.$$

Wird noch § 3, 6) eingesetzt, so ergibt sich als erster Differentialquotient

[1]) Burkhardt 30 §, 6).

2) $$\mathfrak{S}'(u) = \sqrt{\left(1 - \frac{\mathfrak{S}^2}{\varepsilon_1^2}\right)\left(1 - \frac{\mathfrak{S}^2}{\varepsilon_2^2}\right)}$$

und als gesuchte rationale Differentialgleichung

3) $$\mathfrak{S}'(u^2) = \left(1 - \frac{\mathfrak{S}}{\varepsilon_1}\right)\left(1 + \frac{\mathfrak{S}}{\varepsilon_1}\right)\left(1 - \frac{\mathfrak{S}}{\varepsilon_2}\right)\left(1 + \frac{\mathfrak{S}}{\varepsilon_2}\right).$$

Nachdem der Differentialquotient $\mathfrak{S}'$ gefunden ist, kann gezeigt werden, dass die im letzten Paragraphen bei 1) gemachte Annahme richtig ist:

Der 1. Differentialquotient wird null, wenn man für $\mathfrak{S}$ einen der Werte ε_1 oder ε_2 einsetzt. Bildet man den 2. Differentialquotienten

$$\mathfrak{S}'' = \frac{\mathfrak{S}}{\varepsilon_1^2 \varepsilon_2^2}(2\mathfrak{S}^2 - \varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2),$$

so erkennt man sofort, dass dieser für beide ε von null verschieden ist.

Nach den Elementen der Funktionentheorie[1]) schliesst man daher, dass die Funktion $\mathfrak{S}$ bei

$$\frac{\omega_1}{2}, \quad \frac{3\omega_1}{2}, \quad \frac{\omega_2}{2} \text{ und } \frac{\omega_2}{2} + \omega_1$$

zweifache Verzweigungspunkte hat, und dass bei der Abbildung der u-Ebene auf die $\mathfrak{S}$-Fläche bei diesen Punkten die Winkel verdoppelt werden. Da die Gesammtsumme der Winkel um jeden Punkt der u-Ebene 360° beträgt, so ist diese Abbildung nur möglich, wenn man sich vorstellt, dass in den Punkten ε_1, ε_2, $-\varepsilon_1$ und $-\varepsilon_2$ der $\mathfrak{S}$-Fläche zwei Ebenen zusammen hängen, die einen Winkelraum von 720° liefern. Wir haben uns also vorläufig die $\mathfrak{S}$-Fläche zu denken als zwei unendlich benachbarte komplexe Ebenen, die in den vier Punkten ε_1, ε_2, $-\varepsilon_1$, $-\varepsilon_2$ zusammenhängen. Der nächste Paragraph wird zeigen, wie diese Ebenen weiter mit einander verbunden sind.

Aus 2) erhalten wir durch Trennung der Variablen das Integral

[1]) Burkhardt: Einführung in die Theorie der analytischen Funktionen einer komplexen Veränderlichen § 69.

4)
$$u = \int \frac{d\mathfrak{S}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\mathfrak{S}^2}{\varepsilon_1^2}\right)\left(1 - \frac{\mathfrak{S}^2}{\varepsilon_2^2}\right)}} .$$

Die Funktion unter der Wurzel ist im Bezug auf $\mathfrak{S}$ vom 4. Grad, und daher heisst das Integral ein elliptisches. u ist das elliptische Integral und umgekehrt $\mathfrak{S}$ die elliptische Funktion.

Durch einfache Transformation kann der Grad des Radikanden um 1 vermindert werden.[1]) Wir wollen aber hier die symmetrische Form beibehalten, in der die Koeffizienten direkt die Quadrate der Funktionswerte ε_1 und ε_2 in den Verzweigungspunkten sind.

Damit haben wir die Differentialgleichung und ihr elliptisches Integral gefunden und können zu der schon oben erwähnten Abbildungsaufgabe übergehen.

§ 5.

Abbildung der u-Ebene auf die zweiblätterige Riemannsche Fläche der $\mathfrak{S}$-Funktion.

Beschreibt der Punkt $u = x + iy$ einen Weg in der u-Ebene, und können wir immer angeben, welchen Weg dann der Punkt

$$\mathfrak{S} = \mathfrak{X} + i\mathfrak{Y}$$

auf einem andern Gebilde beschreibt, so sagen wir, die u-Ebene lässt sich auf dieses Gebilde abbilden. Oben haben wir gesehen, dass zur Abbildung des ganzen Periodenparallelogramms ein zweiblätteriges Gebilde nötig ist.

Da eine analoge Abbildungsaufgabe schon von R. Fricke[2]) für die Sinusamplitude durchgeführt ist, verweise ich für die ausführliche Darlegung auf jenes Werk.

Weil das in Figur 1 gezeichnete Periodenparallelogramm sich nicht in einfacher Weise abbilden lässt, verschieben wir dieses Parallelogramm um $\frac{\omega_1}{2}$ und $\frac{\omega_3}{2}$, wodurch [Fig. 2] ein entsprechender Teil der u Ebene erhalten wird, der den Vorteil hat, sich in einfacher und eleganter Form abbilden zu lassen.

[1]) Weber III. § 4.

[2]) R Fricke: Kurzgefasste Vorlesungen über verschiedene Gebiete der höhern Mathematik. Analytisch-funktionentheoretischer Teil. S. 240 ff.

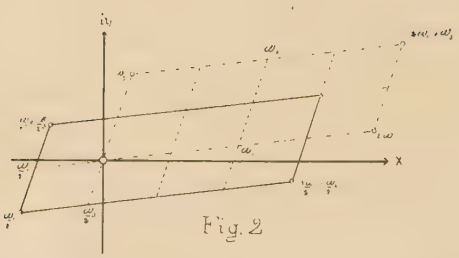

Fig. 2

Von diesem neuen Parallelogramm betrachten wir die linke Hälfte [Fig. 3] und legen sie auf eine komplexe Ebene. Dann

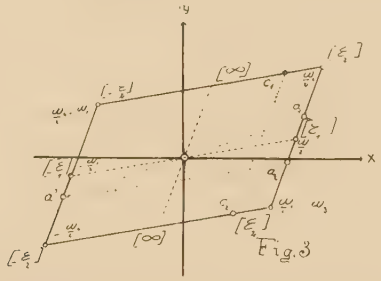

Fig. 3

denken wir die Funktionswerte ε_1 und ε_1 in den entsprechenden Punkten festgehalten und das Parallelogramm aus einer vollkommen elastischen Materie bestehend, so dass die Funktionswerte ∞ ins Unendliche gezogen werden können. Dabei fallen die Ränder in den

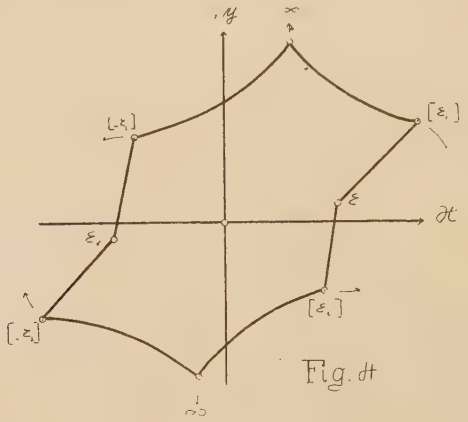

Fig. 4

Schnitten $\varepsilon_1\ \varepsilon_2\ \infty$ und $(-\varepsilon_1)\ (-\varepsilon_2)\ \infty$ zusammen, und da $\mathfrak{S}$ ungerade ist [§ 1], also

$$\mathfrak{S}(a_1) \quad - \quad \mathfrak{S}(a_1) \quad \mathfrak{S}(a_2),$$
$$\mathfrak{S}(c_1) \quad = \quad \mathfrak{S}(c_2),$$

treffen sich je gleiche Funktionswerte. Wandert daher $\mathfrak{S}$ auf der Ebene $\mathfrak{x}\mathfrak{y}$, so gehen die Funktionswerte stetig in einander über.

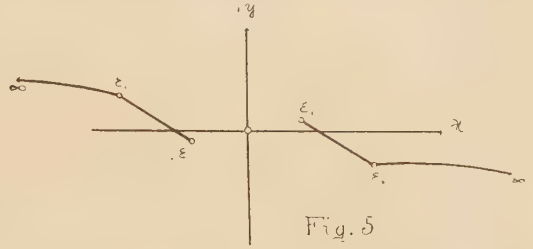

Fig. 5

In gleicher Weise lässt sich das Nachbarparallelogramm rechts [Fig. 2] auf eine zweite komplexe Ebene abbilden.

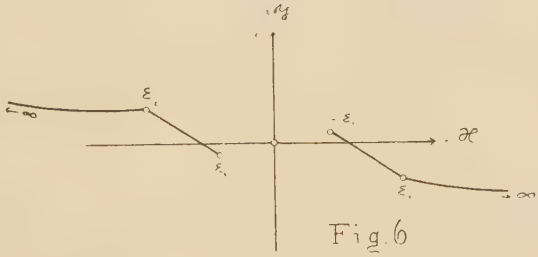

Fig. 6

Die beiden Blätter Figur 5 und Figur 6 werden so aufeinander gelegt, dass die identischen Punkte ε_1 und ε_2 zusammenfallen und längs des gemeinsamen Schnittes $\varepsilon_1\ \varepsilon_2\ (-\infty\ \varepsilon_2)\ (\quad \varepsilon_1)$ kreuzweise verbunden.

Die so entstandene Fläche heisst zweiblätterige Riemann'sche Fläche, und wir sagen: Das Parallelogramm Figur 2 ist abgebildet auf die zweiblätterige Riemann'sche Fläche der $\mathfrak{S}$-Funktion.

Um zu verhindern, dass die Abbildung vieldeutig wird, legen wir die Schnitte S_1 und S_3. Ueberschreitet $\mathfrak{S}$ einen dieser Schnitte, so verändert sich u um $2\,\omega_1$ resp. ω_3 [vergleiche Fig. 7].

Legt u einen bestimmten Weg w von u_1 nach u_2 zurück, so bewegt sich $\mathfrak{S}$ auf der Riemann'schen Fläche von $\mathfrak{S}(u_1)\quad \mathfrak{S}_1$ nach

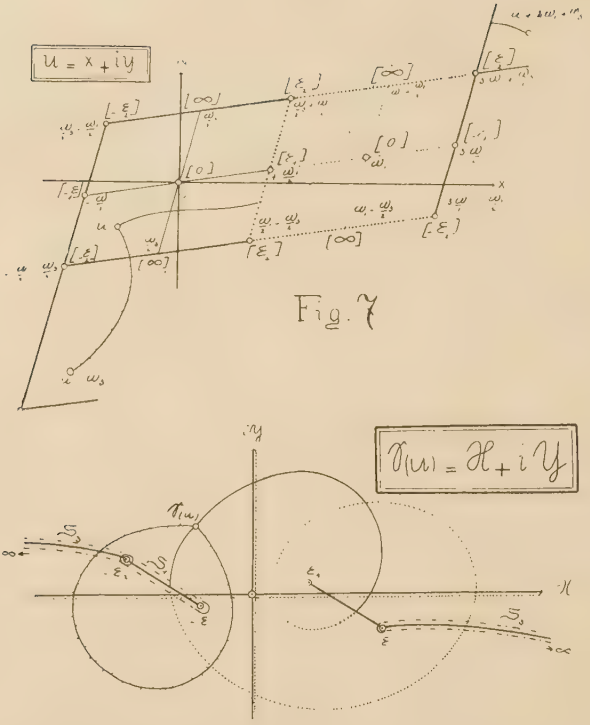

Fig. 7

$\mathfrak{S}(u_2)$ $\mathfrak{S}_2$. Ueberschreitet $\mathfrak{S}$ keinen der Schnitte s_1 und s_2, so kann dieser Weg w nach § 4, 4) dargestellt werden durch das Integral

$$w = \int_{\mathfrak{S}_1}^{\mathfrak{S}_2} \frac{d\mathfrak{S}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\mathfrak{S}^2}{\varepsilon_1}\right)\left(1 - \frac{\mathfrak{S}^2}{\varepsilon_2}\right)}} = \int_{\mathfrak{S}_1}^{\mathfrak{S}_2} \frac{d\mathfrak{S}}{\mathfrak{W}}.$$

Als Anwendung sollen die Perioden dargestellt werden, wobei wir die Grenzen

$$\mathfrak{S}(0) = 0,\ \mathfrak{S}\left(\frac{\omega_1}{2}\right) = \varepsilon_1,\ \mathfrak{S}\left(\frac{\omega_3}{2}\right) = \infty$$

haben und bekommen

$$\omega_1 = 2\int_0^{\varepsilon_1} \frac{d\mathfrak{S}}{\mathfrak{W}}, \qquad \omega_3 = 2\int_0^{\infty} \frac{d\mathfrak{S}}{\mathfrak{W}}.$$

Ebenso ergibt sich

$$\int_{S_1} \frac{d\mathfrak{S}}{\mathfrak{W}} = \omega_3, \qquad \int_{S_3} \frac{d\mathfrak{S}}{\mathfrak{W}} = 2\,\omega_1.$$

Die Figur 7 zeigt entsprechende Wege auf der u-Ebene und der $\mathfrak{S}$-Fläche in derselben Punktierung.

§ 6.

Entwicklung von $\mathfrak{S}$ in eine Potenzreihe.

Da wir später wieder darauf zurückkommen müssen, so sei schon hier die Entwicklung von $\mathfrak{S}$ nach Potenzen von u durchgeführt.

Die einfachste Reihenentwicklung ergibt der Taylor'sche Satz. Nach ihm kann $\mathfrak{S}$ in der Umgebung eines beliebigen Punktes in eine Potenzreihe entwickelt werden, die in jedem um diesen Punkt gezogenen Kreise gilt, der keine singulären Punkte einschliesst.

Führt man noch für Summe und Produkt von ε_1^2 und ε_2^2 folgende Abkürzungen ein

1) $$\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 = \mathfrak{s}; \quad \varepsilon_1^2 \cdot \varepsilon_2^2 = \mathfrak{p},$$

so ergeben sich nach § 4, 2) die Differentialquotienten

$$\mathfrak{S}' = \sqrt{\left(1 - \frac{\mathfrak{S}^2}{\varepsilon_1^2}\right)\left(1 - \frac{\mathfrak{S}^2}{\varepsilon_2^2}\right)}\ \mathfrak{W}$$

$$\mathfrak{S}'' = \frac{\mathfrak{S}}{\mathfrak{p}} \cdot (2\,\mathfrak{S}^2 - \mathfrak{s})$$

$$\mathfrak{S}''' = \frac{1}{\mathfrak{p}} \cdot (6\,\mathfrak{S}^2 - \mathfrak{s})\,\mathfrak{W}$$

$$\mathfrak{S}^{IV} = \frac{\mathfrak{S}}{\mathfrak{p}^2} \cdot (24\,\mathfrak{S}^4 - 20\,\mathfrak{s}\,\mathfrak{S}^2 + 12\,\mathfrak{p} + \mathfrak{s}^2)$$

2)

$$\mathfrak{S}^{V} = \frac{1}{\mathfrak{p}^2}\,(120\,\mathfrak{S}^4 - 60\,\mathfrak{s}\,\mathfrak{S}^2 + 12\,\mathfrak{p} + \mathfrak{s}^2) \cdot \mathfrak{W}$$

$$\mathfrak{S}^{VI} \quad \frac{\mathfrak{S}}{\mathfrak{p}^3} \cdot [720\mathfrak{S}^6 \quad 840\mathfrak{s}\,\mathfrak{S}^4 + (504\mathfrak{p} + 182\mathfrak{s}^2) \cdot \mathfrak{S}^2 \quad 132\mathfrak{s}\mathfrak{p} \quad \mathfrak{s}^3]$$

$$\mathfrak{S}^{VII} \quad \frac{1}{\mathfrak{p}^3}[5040\,\mathfrak{S}^6 \quad 4200\,\mathfrak{s}\,\mathfrak{S}^4 + (1008\,\mathfrak{p} + 364\,\mathfrak{s}^2) \cdot \mathfrak{S}^2 \quad 132\,\mathfrak{s}\mathfrak{p} \quad \mathfrak{s}^3] \cdot \mathfrak{W}$$

$$\mathfrak{S}^{VIII} \quad \frac{\mathfrak{S}}{\mathfrak{p}^4}[40320\,\mathfrak{S}^8 \quad 60580\,\mathfrak{s}\,\mathfrak{S}^6 + (32256\,\mathfrak{p} + 21718\,\mathfrak{s}^2) \cdot \mathfrak{S}^4 \quad (20088\mathfrak{p} + 1094\,\mathfrak{s}^2) \cdot \mathfrak{s}\,\mathfrak{S}^2 + 2016\mathfrak{p}^2 + 860\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{s}^2 + \mathfrak{s}^4]$$

. . . . . .

Bildet man nun die Taylor'sche Reihe

$$3) \quad \mathfrak{S}(u) = \mathfrak{S}(a) + \frac{u-a}{1!} \cdot \mathfrak{S}'(a) + \frac{(u-a)^2}{2!} \cdot \mathfrak{S}''(a) + \cdots,^{1})$$

so kann durch sie für jeden beliebigen Punkt u in der Umgebung eines Punktes a die Potenzreihe angegeben werden.

Für $a = 0$ lässt sich die Reihe leicht angeben, da dann

$$\mathfrak{S}(0) \quad 0 \text{ und } \mathfrak{S}'(0) \quad \mathfrak{W}_0 \quad 1$$

wird, und die obigen Differentialquotienten einfach werden:

$$\mathfrak{S}(u) = u - \frac{\mathfrak{s}}{3!\,\mathfrak{p}} \cdot u^3 + \frac{\mathfrak{s}^2 + 12\,\mathfrak{p}}{5!\,\mathfrak{p}^2} \cdot u^5 - \frac{\mathfrak{s}^3 + 132\,\mathfrak{p}\,\mathfrak{s}}{7!\,\mathfrak{p}^3} \cdot u^7$$

$$4) \qquad + \frac{\mathfrak{s}^4 + 860\,\mathfrak{p}\,\mathfrak{s}^2 + 2016\,\mathfrak{p}^2}{9!\,\mathfrak{p}^4} \cdot u^9 \quad \cdots$$

Diese Reihe gilt für jedes u, das in einem Kreis um O liegt, der weder $\frac{\omega_1}{2}$, $\frac{\omega_2}{2}$, $\frac{\omega_1 - \omega_3}{2}$ noch $\frac{\omega_3}{2}$ einschliesst.

§ 7.

Der Differentialquotient $\mathfrak{S}'$.

Bei der Teilung ist die Kenntnis einiger Eigenschaften des ersten Differentialquotienten $\mathfrak{S}'$ erforderlich, und daher soll er hier näher

[1]) Burkhardt: Analytische Funktionen einer komplexen Veränderlichen S. 133.

untersucht werden. $\mathfrak{S}'$ setzt sich zusammen aus 2 Faktoren, für die analog wie es Abel[1]) mit den Funktionen f und F getan hat, neue Zeichen eingeführt werden sollen durch die Definitionen:

1) $$\mathfrak{C}(u) = \sqrt{1 - \frac{\mathfrak{S}^2 u}{\varepsilon_1^2}}; \qquad \mathfrak{D}(u) = \sqrt{1 - \frac{\mathfrak{S}^2 u}{\varepsilon_2^2}}.$$

Wir wollen zuerst zeigen, dass $\mathfrak{C}(u)$ und $\mathfrak{D}(u)$ unter den $\mathfrak{S}$-Funktionen, die wir in § 1 betrachtet haben, vorkommen. Dazu erinnern wir uns an den Zusammenhang zwischen der $\mathfrak{S}$- und der p-Funktion [§ 1, 5)]

$$\sqrt{p u - e_\alpha} \quad \mathfrak{S}_{\alpha o}\, u,$$

$$p u - e_\alpha = \frac{\sigma_\alpha^2 u}{\sigma^2 u}.$$

Ebenso ist

$$p u - e_\beta = \frac{\sigma_\beta^2 u}{\sigma^2 u}.$$

Die beiden Quadrate von einander subtrahiert und mit dem Nenner multipliziert:

$$\sigma_\alpha^2 u - \sigma_\beta^2 u = (e_\beta - e_\alpha) \cdot \sigma^2 u,$$

$\alpha = 3$, $\beta = 1$ gesetzt und durch $\sigma^2_3 u$ dividiert, ergibt

$$1 \quad \frac{\sigma_1^2 u}{\sigma_3^2 u} \quad (e_1 \quad e_3) \cdot \frac{\sigma^2 u}{\sigma^2_3 u}.$$

Berücksichtigt man noch § 3, 5), so wird

2) $$1 \quad \frac{\mathfrak{S}^2 u}{\varepsilon_1^2} \quad \mathfrak{C}^2(u) \quad \mathfrak{S}_{13}^2(u).$$

Analog wird

$$1 - \frac{\mathfrak{S}^2 u}{\varepsilon_2^2} = \mathfrak{D}^2(u) = \mathfrak{S}_{23}^2(u).$$

Die Sigmafunktionen sind eindeutige Funktionen ihres Argumentes u, und somit sind $\mathfrak{C}\, u$ und $\mathfrak{D}\, u$ eindeutig festgelegt durch die Definitionen

3) $$\mathfrak{C}\, u = \mathfrak{S}_{13}\, u$$

$$\mathfrak{D}\, u = \mathfrak{S}_{23}\, u,$$

[1]) Oeuvres complètes: Neue Ausgabe, T. I. S. 265.

und verwendet man statt dessen

$$3^{a}) \qquad \sqrt{1 - \frac{\mathfrak{S}^2}{\varepsilon_1^2}} \quad \text{und} \quad \sqrt{1 - \frac{\mathfrak{S}^2}{\varepsilon_2^2}},$$

so ist nur für die Quadratwurzeln derjenige Wert zu wählen, der der Definition von $\mathfrak{C}u$ und $\mathfrak{D}u$ durch Sigmafunktionen entspricht.

Damit ist $\mathfrak{S}'$ eindeutig ausgedrückt durch die Gleichung

$$4) \qquad \mathfrak{S}'u = \mathfrak{C}u \,.\, \mathfrak{D}u.$$

Für $\mathfrak{C}u$ und $\mathfrak{D}u$ lassen sich wie für $\mathfrak{S}u$ die Perioden bestimmen, und aus ihnen sollen die Perioden von $\mathfrak{S}'$ gebildet werden. Dazu dienen die schon in § 2 verwendeten Additionsgleichungen der Sigmafunktionen für die Vermehrung des Arguments um Perioden.

Wir finden analog wie dort für $\mathfrak{S}u$, nun für $\mathfrak{C}u$ und $\mathfrak{D}u$

$$5) \qquad \begin{aligned} \mathfrak{C}(u + 2\omega_1) &= \mathfrak{C}u, & \mathfrak{D}(u + \omega_1) &= -\mathfrak{D}u, \\ \mathfrak{C}(u + \omega_2) &= -\mathfrak{C}u, & \mathfrak{D}(u + 2\omega_2) &= \mathfrak{D}u, \\ \mathfrak{C}(u + 2\omega_3) &= \mathfrak{C}u, & \mathfrak{D}(u + 2\omega_3) &= -\mathfrak{D}u, \end{aligned}$$

und erkennen daraus, dass

$$6) \qquad \begin{aligned} &\mathfrak{C}u \text{ die beiden Perioden } 2\omega_1 \text{ und } \omega_2, \\ &\mathfrak{D}u \text{ die beiden Perioden } \omega_1 \text{ und } 2\omega_3 \end{aligned}$$

hat.

Sobald wir die Perioden kennen, so ist uns die Möglichkeit geboten $\mathfrak{C}u$ und $\mathfrak{D}u$ geometrisch auf ein Periodenparallelogramm zu beziehen. Dies ist in Figur 8 und 9 durchgeführt, wobei die noch zu bestimmenden Funktionswerte wieder in Klammern beigefügt sind.

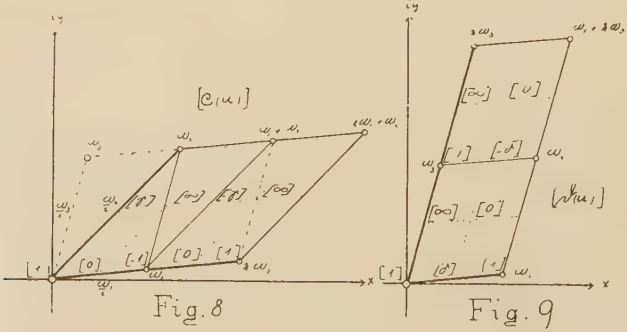

Fig. 8 Fig. 9

Nach § 3 ist

$$\mathfrak{S}\,0 = 0, \text{ also } \mathfrak{C}\,0 = 1. \qquad \mathfrak{D}\,0 = 1$$

$$\mathfrak{S}\,\frac{\omega_1}{2} = \varepsilon_1, \text{ also } \mathfrak{C}\,\frac{\omega_1}{2} = 0. \qquad \mathfrak{D}\,\frac{\omega_1}{2} = \sqrt{1 - \frac{\varepsilon_1^2}{\varepsilon_2^2}} = \delta$$

7)

$$\mathfrak{S}^2\,\frac{\omega_2}{2} = \varepsilon_2, \text{ also } \mathfrak{C}\,\frac{\omega_2}{2} = \sqrt{1 - \frac{\varepsilon_2^2}{\varepsilon_1^2}} = \gamma, \quad \mathfrak{D}\,\frac{\omega_2}{2} = 0$$

$$\mathfrak{S}\,\frac{\omega_3}{2} = \infty, \text{ also } \mathfrak{C}\,\frac{\omega_3}{2} = \infty, \qquad \mathfrak{D}\,\frac{\omega_3}{2} = \infty$$

laut Definition 1).

Aus der Figur 8 folgt weiter, dass die Funktionswerte $\mathfrak{C}(u)$ in den Dreiecken

$$2\omega_1 \,..\, 2\omega_1 + \omega_2 \,..\, \omega_1 + \omega_2 \text{ und } 0 \,..\, \omega_2 \,..\, \omega_3$$

dieselben sind, und daher kann für $\mathfrak{C}u$ auch das Periodenparallelogramm

$$0 \,..\, 2\omega_1 \,..\, 2\omega_1 + \omega_3 \,..\, \omega_3$$

gewählt werden.

Bilden wir nun übereinstimmend mit 4) das Produkt $\mathfrak{C}u.\ \mathfrak{D}u$, so ergibt sich, dass $\mathfrak{S}'(u)$ bei Vermehrung von u um $2\omega_1$ und $2\omega_3$ wieder denselben Wert annimmt, also die beiden Perioden $2\omega_1$ und $2\omega_3$ hat. Aus 7) ergeben sich ferner die speziellen Werte

$$\mathfrak{S}'0 = 1, \quad \mathfrak{S}'\,\frac{\omega_1}{2} = 0, \quad \mathfrak{S}'\,\frac{\omega_2}{2} = 0, \quad \mathfrak{S}'\,\frac{\omega_3}{2} = \infty$$

Die Figur 10 zeigt $\mathfrak{S}'$ geometrisch dargestellt.

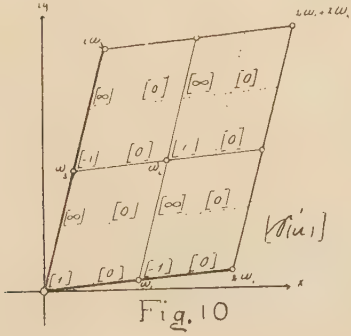

Fig. 10

Es empfiehlt sich an dieser Stelle die Veränderungen anzugeben, die $\mathfrak{S}u$ erleidet, bei Vermehrung von u um halbe Perioden. Wir verwenden die Gleichungen[1]):

$$\sigma\left(u+\frac{\omega_\alpha}{2}\right) = -e^{\eta_\alpha u}\sigma\,\frac{\omega_\alpha}{2}\cdot\sigma_\alpha u,$$

8) $$\sigma_\beta\left(u+\frac{\omega_\alpha}{2}\right) = -e^{\eta_\alpha u}\sqrt{e_\alpha - e_\beta}\cdot\sigma\,\frac{\omega_\alpha}{2}\cdot\sigma_\gamma u,$$

$$\sigma_\alpha\left(u+\frac{\omega_\alpha}{2}\right) = -e^{\eta_\alpha u}\sqrt{e_\alpha - e_\beta}\cdot\sqrt{e_\alpha - e_\gamma}\cdot\sigma\,\frac{\omega_\alpha}{2}\cdot\sigma\, u$$

und erhalten für die Funktion $\mathfrak{S}_{03}(u)$

$$\mathfrak{S}\left(u+\frac{\omega_1}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{e_1 - e_3}}\cdot\frac{\sigma_1 u}{\sigma_2 u},$$

9) $$\mathfrak{S}\left(u+\frac{\omega_2}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{e_2 - e_3}}\cdot\frac{\sigma_2 u}{\sigma_1 u},$$

$$\mathfrak{S}\left(u+\frac{\omega_3}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{e_3 - e_2}\,\sqrt{e_3 - e_1}}\cdot\frac{\sigma_3 u}{\sigma\, u}.$$

Führt man sowohl die Funktionswerte ε_1 und ε_2 in den Verzweigungspunkten § 3, 5), als auch die Funktionen $\mathfrak{C}u$ und $\mathfrak{D}u$ ein so ergeben sich die einfachen Ausdrücke:

$$\mathfrak{S}\left(u+\frac{\omega_1}{2}\right) = \varepsilon_1\cdot\frac{\mathfrak{C}u}{\mathfrak{D}u},$$

10) $$\mathfrak{S}\left(u+\frac{\omega_2}{2}\right) = \varepsilon_2\cdot\frac{\mathfrak{D}u}{\mathfrak{C}u},$$

$$\mathfrak{S}\left(u+\frac{\omega_3}{2}\right) = \varepsilon_1\,\varepsilon_2\cdot\frac{1}{\mathfrak{S}u}$$

und ferner

11) $$\mathfrak{S}\left(u+\frac{\omega_1}{2}\right)\cdot\mathfrak{S}\left(u+\frac{\omega_2}{2}\right) = \varepsilon_1\,\varepsilon_2,$$

[1]) Diese Gleichungen werden erhalten, wenn man in den von Schwarz herausgegebenen Formeln und Lehrsätzen zum Gebrauch der elliptischen Funktionen nach Weierstrass Art. 23 die Perioden nach der, in der Einleitung festgelegten Weise, wählt und allgemeine Indices $\alpha, \beta = 1, 2, 3$ einführt.

woraus man erkennt, dass dieses Produkt von u unabhängig ist.

Setzen wir zur Kontrolle $u = 0$, so wird

$$\mathfrak{S}\,\frac{\omega_1}{2} = \varepsilon_1,\ \mathfrak{S}\,\frac{\omega_2}{2} = \varepsilon_2 \text{ und } \mathfrak{S}\,\frac{\omega_3}{2} = \infty,$$

wie es sein muss.

§ 8.

Die Funktion S.

Schon bei der Ableitung der Potenzreihe für $\mathfrak{S}$ [§ 6] wäre es von Vorteil gewesen, eine Funktion zu besitzen, die nur noch von einem Parameter abhängt, und in der späteren Rechnung wird sich meistens eine bedeutende Vereinfachung erzielen lassen, wenn die Funktion diese Bedingung erfüllt.

Wir wollen daher eine solche Funktion aufstellen und ihre einfachsten Eigenschaften herleiten.

1. Als Parameter sei

$$1) \qquad \alpha = \frac{\mathfrak{S}^2}{\sqrt{\mathfrak{p}}} = \frac{\varepsilon_1^{\,2} + \varepsilon_2^{\,2}}{\varepsilon_1\,\varepsilon_2}$$

eingeführt und zuerst untersucht.

Werden die unendlichen Produkte § 3, 5) eingesetzt, so geht α über in

$$2) \qquad \alpha = 4\,h^{\frac{1}{2}}\,\frac{\mathrm{H}^4{}_{2\nu}}{\mathrm{H}^4{}_{2\nu-1}} + \frac{h^{-\frac{1}{2}}}{4}\cdot\frac{\mathrm{H}^4{}_{2\nu-1}}{\mathrm{H}^4{}_{2\nu}}$$

oder ausführlich geschrieben

$$3) \qquad \alpha = \frac{h}{4}^{\frac{1}{2}}\cdot \Pi\left(\frac{1+h^{2\nu-1}}{1+h^{2\nu}}\right)^4 + 4\,.\,h^{+\frac{1}{2}}\,\Pi\left(\frac{1+h^{2\nu}}{1+h^{2\nu-1}}\right)^4.$$

Durch Auflösung der Produkte lässt sich α berechnen, und man erhält eine Reihe von der Form

$$4) \qquad \alpha = \frac{h}{4}^{-\frac{1}{2}}\cdot(1 + a_1\,h + a_2\,h^2 + \ldots),$$

worin a_1, a_2, ... ganze rationale Zahlen sind.

Um einen Uebergang zu den Jacobischen Funktionen zu bekommen, soll α durch den dort gebrauchten Modul $\varkappa$ ausgedrückt

werden. Führt man in 1) statt ε_1 und ε_2 die Wurzeln aus den Differenzen der e_1, e_2, e_3 ein und nimmt die Umrechnung nach „Weber III. § 46“ vor, so erhält man[1])

$$5) \qquad \alpha = x + \frac{1}{x}.$$

Daraus folgt, dass α eine einfache rationale Funktion von x ist.

2. Wir setzen

$$6) \qquad w = \frac{u}{\sqrt{\varepsilon_1\ \varepsilon_2}}$$

und bestimmen zuerst $\mathfrak{S}(w)$ als Funktion von $\mathfrak{S}(u)$. Dazu verwenden wir die Gleichungen[2])

$$7) \qquad \begin{aligned} \sigma(\lambda u,\ \lambda\omega_1,\ \lambda\omega_3) &= \lambda\ .\ \sigma(u,\ \omega_1,\ \omega_3), \\ \sigma_3(\lambda u,\ \lambda\omega_1,\ \lambda\omega_3) &= \sigma_3(u,\ \omega_1,\ \omega_3), \end{aligned}$$

und erhalten

$$8) \qquad \mathfrak{S}(w) = \frac{\sigma \dfrac{u}{\sqrt{\varepsilon_1\ \varepsilon_2}}}{\sigma_3 \dfrac{u}{\sqrt{\varepsilon_1\ \varepsilon_2}}} = \frac{\mathfrak{S}\,u}{\sqrt{\varepsilon_1\ \varepsilon_2}}.$$

Durch Differentiation ergeben sich die Differentialquotienten:

$$\mathfrak{S}'(w) = \frac{d\,\mathfrak{S}(w)}{d\,w} = \frac{d\,\dfrac{\mathfrak{S}\,u}{\sqrt{\varepsilon_1\ \varepsilon_2}}}{d\,\dfrac{u}{\sqrt{\varepsilon_1\ \varepsilon_2}}} = \mathfrak{S}'(u)$$

$$9) \qquad \mathfrak{S}''(w) = \frac{d\,\mathfrak{S}'(w)}{d\,w} = \frac{d\,\mathfrak{S}'(u)}{d\,\dfrac{u}{\sqrt{\varepsilon_1\ \varepsilon_2}}} = \sqrt{\varepsilon_1\ \varepsilon_2}\ .\ \mathfrak{S}''(u)$$

$$\mathfrak{S}'''(w) = \varepsilon_1\ \varepsilon_2\ .\ \mathfrak{S}'''(u)$$

$$\mathfrak{S}^{\mathrm{IV}}(w) = \left(\sqrt{\varepsilon_1\ \varepsilon_2}\right)^3\ .\ \mathfrak{S}^{\mathrm{IV}}(u)$$

. . . . . .

[1]) Wie ich nachträglich gefunden habe, verwendet Jacobi, Gesam. Werke I. p. 266 oder: Crelle 4, Suite des notices sur les fonctions elliptiques, dieselbe Bezeichnung, während Kronecker: Sitzungsberichte der Berliner Academie 1886, S. 702 und ff. den Buchstaben ϱ braucht.

[2]) Weber III. § 37, 8). Dabei soll hervorgehoben werden, dass λ ein ganz willkürlicher Faktor ist.

3. Als neue Funktion sei nun eingeführt

10) $$S(w) = \mathfrak{S}^2(w) = \frac{\mathfrak{S}^2 u}{\varepsilon_1 \varepsilon_2}.$$

Vergleichen wir zuerst $S(w)$ mit der Sinusamplitude, so ergibt „Weber III“. § 46 den Zusammenhang. Dort folgt aus (4)

$$\frac{1}{\sqrt{e_1 - e_3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{e_2 - e_3}} = \varepsilon_1 \varepsilon_2 = \frac{\omega_1^2}{4 k^2 \varkappa}$$

und aus der 3. Gleichung (1)

$$\mathfrak{S}^2 u = \frac{\omega_1^2}{4 k^2} sn^2 \frac{2 k u}{\omega_1};$$

also ist

$$\frac{\mathfrak{S}^2 u}{\varepsilon_1 \varepsilon_2} = \varkappa \cdot sn^2 \frac{u}{\sqrt{\varkappa}\sqrt{\varepsilon_1 \varepsilon_2}}$$

oder

$$S(w) = \varkappa\, sn^2 \left(\frac{w}{\sqrt{\varkappa}}\right).$$

Für diese Funktion S soll dieselbe Entwicklung durchgeführt werden, wie in § 6 für die $\mathfrak{S}$-Funktion.

Die Rechnung vereinfacht sich, weil wir dort schon $\mathfrak{S}'(u)$, $\mathfrak{S}''(u)$, ... gerechnet haben und sofort α [1)] einführen können.

$$S'(w) = 2\mathfrak{S}w \cdot \mathfrak{S}'w \cdot \frac{2\mathfrak{S}u \cdot \mathfrak{S}'u}{\sqrt{\varepsilon_1 \varepsilon_2}},$$

11) $$S'(w) = 2\sqrt{S(1 - \alpha S + S^2)} = \mathfrak{W}.$$

$$S''(w) \quad 2\mathfrak{S}w \cdot \mathfrak{S}''w + 2\mathfrak{S}'^2 w \quad 2\mathfrak{S}u \cdot \mathfrak{S}''u + 2\mathfrak{S}'^2 u,$$

11a) $$S''(w) \quad 2(1 - 2\alpha S + 3S^2).$$

$$S'''(w) = 2(\mathfrak{S}w \cdot \mathfrak{S}'''w + 3\mathfrak{S}'w \cdot \mathfrak{S}''w)$$

$$2(\sqrt{\varepsilon_1 \varepsilon_2} \cdot \mathfrak{S}u \cdot \mathfrak{S}'''u + 3\sqrt{\varepsilon_1 \varepsilon_2} \cdot \mathfrak{S}'u \cdot \mathfrak{S}''u),$$

$$S'''(w) \cdot (6S \quad 2\alpha) \cdot \mathfrak{W}.$$

$$S^{IV}(w) \quad 2(\mathfrak{S}w \cdot \mathfrak{S}^{IV} w + 4\mathfrak{S}'w \cdot \mathfrak{S}'''w + 3\mathfrak{S}''^2 w)$$

$$2(\varepsilon_1 \varepsilon_2 \cdot \mathfrak{S}u \cdot \mathfrak{S}^{IV} u + 4\varepsilon_1 \varepsilon_2 \mathfrak{S}'u \cdot \mathfrak{S}'''u + 3\varepsilon_1 \varepsilon_2 \cdot \mathfrak{S}''^2 u),$$

$$S^{IV}(w) = 120\,S^3 - 120\,a\,S^2 + (72 + 36\,a^2)\,.\,S - 8\,a.$$

. . . . . .

Bildet man wieder nach dem Taylorschen Satze in der Umgebung des Nullpunktes die Potenzreihe, so erhält man

12) $$S(w) = \frac{2}{2!}\,w^2 - \frac{8\,a}{4!}\,w^4 + \cdots$$

Die Koeffizienten dieser Potenzreihe sind, wie wir es gewünscht haben, nur noch von einem Parameter nämlich a abhängig, oder die Funktion $S(w)$ lässt sich immer in eine Potenzreihe entwickeln, deren Koeffizienten ganze rationale Funktionen des Parameters a mit rationalen Zahlenkoeffizienten sind.

Aus 12) folgt ferner, dass $S(w)$ eine gerade Funktion von w ist.

4. Für die Funktion $S(w)$ und ihren ersten Differentialquotienten $S'(w)$ soll das Periodenparallelogramm angegeben werden.

Nach § 2, 1) wird

$$S\left(\frac{u}{\sqrt{\varepsilon_1\,\varepsilon_2}} + \frac{\omega_1}{\sqrt{\varepsilon_1\,\varepsilon_2}}\right) \quad S\left(w + \frac{\omega_1}{\sqrt{\varepsilon_1\,\varepsilon_2}}\right) \quad \frac{\mathfrak{S}^2(u+\omega_1)}{\varepsilon_1\,\varepsilon_2} \quad \frac{\mathfrak{S}^2 u}{\varepsilon_1\,\varepsilon_2} \quad S(w)$$

und ebenso

$$S\left(\frac{u}{\sqrt{\varepsilon_1\,\varepsilon_2}} + \frac{\omega_3}{\sqrt{\varepsilon_1\,\varepsilon_2}}\right) = S\left(w + \frac{\omega_3}{\sqrt{\varepsilon_1\,\varepsilon_2}}\right) = S(w).$$

Werden für die neuen Perioden die Bezeichnungen:

13) $$\frac{\omega_1}{\sqrt{\varepsilon_1\,\varepsilon_2}} = \omega_{\mathrm{I}}, \qquad \frac{\omega_2}{\sqrt{\varepsilon_1\,\varepsilon_2}} = \omega_{\mathrm{II}}, \qquad \frac{\omega_3}{\sqrt{\varepsilon_1\,\varepsilon_2}} = \omega_{\mathrm{III}}$$

eingeführt, so drückt sich die Periodizität der S-Funktion aus durch die Gleichungen

14) $$S(w + \omega_{\mathrm{I}}) = S(w).$$
$$S(w + \omega_{\mathrm{III}}) = S(w).$$

Die Funktion S nimmt jeden Wert im Periodenparallelogramm zweimal an: denn aus der Definition durch die $\mathfrak{S}$-Funktion oder

der Reihenentwicklung 12) erkennt man sofort, dass S einen doppelten Nullpunkt in 0 und einen doppelten Pol in $\frac{\omega_{III}}{2}$ hat. Den Verzweigungspunkten entsprechen die Funktionswerte:

15) $$S\,\frac{\omega_I}{2} = \frac{\mathfrak{S}^2\frac{\omega_1}{2}}{\varepsilon_1\,\varepsilon_2} = \frac{\varepsilon_1^{\,2}}{\varepsilon_1\,\varepsilon_2} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} = \varepsilon_I, \quad S\,\frac{\omega_{II}}{2} = \frac{\mathfrak{S}^2\frac{\omega_2}{2}}{\varepsilon_1\,\varepsilon_2} = \frac{\varepsilon_2^{\,2}}{\varepsilon_1\,\varepsilon_2} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} = \varepsilon_{II}.$$

Die beiden ε sind zueinander reziprok. Drücken wir durch sie den Parameter α aus, so erhält man

16) $$\alpha = \varepsilon_I + \varepsilon_{II}$$

Die Figur 11 zeigt die geometrische Darstellung des Periodenparallelogramms der S-Funktion.

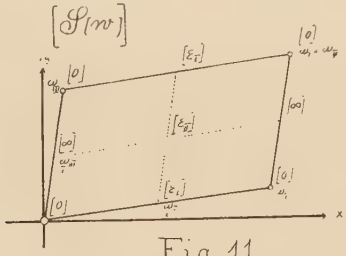

Fig. 11

Für den 1. Differentialquotienten $S'(w)$ ergibt sich nach § 2, 1) und § 7

17) $$S'(w + \omega_I) = \frac{2\,\mathfrak{S}(u + \omega_1)\,.\,\mathfrak{S}'(u + \omega_1)}{\varepsilon_1\,.\,\varepsilon_2} = S'(w),$$
$$S'(w + \omega_{III}) = \ldots\ldots\ldots = S'(w)$$

und die speziellen Werte (vergleiche Figur 12)

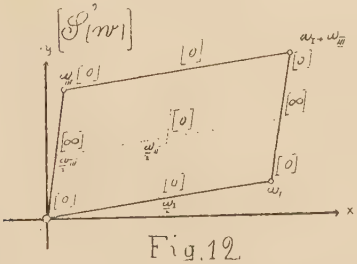

Fig. 12

18) $$S'(0) = 0, \quad S'\frac{\omega_I}{2} = 0, \quad S'\frac{\omega_{II}}{2} = 0, \quad S'\frac{\omega_{III}}{2} = \infty.$$

Nach § 7, 10) lässt sich die Veränderung von S bei Vermehrung des Argumentes um halbe Perioden angeben:

$$S\left(w + \frac{\omega_I}{2}\right) = \frac{\mathfrak{S}^2\left(u + \frac{\omega_1}{2}\right)}{\varepsilon_1 - \varepsilon_2} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \cdot \frac{1 - \frac{\mathfrak{S}^2 u}{\varepsilon_1^2}}{1 - \frac{\mathfrak{S}^2 u}{\varepsilon_2^2}} = \varepsilon_{II} \cdot \frac{\varepsilon_I - S(w)}{\varepsilon_{II} - S(w)},$$

19) $$S\left(w + \frac{\omega_{II}}{2}\right) = \varepsilon_I \cdot \frac{\varepsilon_{II} - S\,w}{\varepsilon_1 - S\,w},$$

$$S\left(w + \frac{\omega_{III}}{2}\right) = \frac{1}{S\,w}.$$

Für $w = 0$ finden wir die speziellen Werte

$$S\frac{\omega_I}{2} = \varepsilon_I, \quad S\frac{\omega_{II}}{2} = \varepsilon_{II}, \quad S\frac{\omega_{III}}{2} = \infty,$$

wie es nach 10) und 15) sein muss.

Zweiter Teil.

Algebra.

Erster Abschnitt.

Addition und Multiplikation.

§ 9.

Addition der Funktionen $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{S}'$.

Das Additionstheorem ergibt uns den Wert der Funktion für die Summe der Argumente, wenn die Funktionen der Summanden gegeben sind. In unserem Fall soll $\mathfrak{S}(u + v)$ ausgedrückt werden durch die als bekannt anzusehenden Funktionen $\mathfrak{S}(u)$, $\mathfrak{S}(v)$, $\mathfrak{S}'(u)$ und $\mathfrak{S}'(v)$.

Zur Verwendung kommen zwei der allgemeinen Additionsgleichungen der Sigmafunktionen:[1])

1) $\sigma_\beta(u + v) \cdot \sigma(u - v) = \sigma u \cdot \sigma_\beta u \cdot \sigma_\gamma v \cdot \sigma_\alpha v - \sigma_\gamma u \cdot \sigma_\alpha u \cdot \sigma v \cdot \sigma_\beta v,$

2) $\sigma_\alpha(u + v) \cdot \sigma_\alpha(u - v) = \sigma_\alpha^2 u \cdot \sigma_\alpha^2 v - (e_\alpha - e_\beta)(e_\alpha - e_\gamma) \cdot \sigma^2 u \cdot \sigma^2 v,$

die nach folgenden Umformungen für die $\mathfrak{S}$-Funktion gebraucht werden können:

a) in 1) $-v$ für $+v$ und $\beta = 3$, $\alpha = 1$, $\gamma = 2$;

b) in 2) $\alpha = 3$, $\beta = 1$, $\gamma = 2$ gesetzt;

3) $\sigma(u + v) \cdot \sigma_3(u - v) = \sigma u \cdot \sigma_3 u \cdot \sigma_2 v \cdot \sigma_1 v + \sigma_2 u \cdot \sigma_1 u \cdot \sigma v \cdot \sigma_3 v.$

[1]) Burkhardt § 35, 8), 7). S. 92.

4) $\sigma_3(u+v)\,.\,\sigma_3(u-v) = \sigma_3^2 u\,.\,\sigma_3^2 v - (e_1-e_3)(e_2-e_3)\,\sigma^2 u\,.\,\sigma^2 v$;

c) die rechte Seite von 3) erweitert,
im 1. Summanden mit $\sigma_3 u\,.\,\sigma_3^2 v$, im 2. mit $\sigma_3^3 u\,.\,\sigma_3 v$;

d) die rechte Seite von 4) erweitert,
im 2. Summanden mit $\sigma_3^2 u\,.\,\sigma_3^2 v$;

5) $\sigma(u+v)\,.\,\sigma_3(u-v) = \sigma_3^2 u\,.\,\sigma_3^2 v\,\{\mathfrak{S}_{03}(u)\,.\,\mathfrak{S}_{13}(v)\,.\,\mathfrak{S}_{23}(v) + \mathfrak{S}_{03}(v)\,.\,\mathfrak{S}_{13}(u)\,.\,\mathfrak{S}_{23}(u)\}$,

6) $\sigma_3(u+v)\,.\,\sigma_3(u-v) = \sigma_3^2 u\,.\,\sigma_3^2 v\left\{1 - \frac{\mathfrak{S}_{03}^2(u)\,.\,\mathfrak{S}_{03}^2(v)}{\varepsilon_1^2\,\varepsilon_2^2}\right\}$;

daraus ergibt sich durch Division

7) $$\mathfrak{S}(u+v) = \frac{\mathfrak{S}u\,.\,\mathfrak{S}_{13}v\,.\,\mathfrak{S}_{23}v + \mathfrak{S}v\,.\,\mathfrak{S}_{13}u\,.\,\mathfrak{S}_{23}u}{1 - \frac{\mathfrak{S}^2 u\,.\,\mathfrak{S}^2 v}{\varepsilon_1^2\,.\,\varepsilon_2^2}}$$

und nach Einführung des 1. Differentialquotienten § 7, 4)

8) $$\mathfrak{S}(u+v) = \frac{\mathfrak{S}u\,.\,\mathfrak{S}'v + \mathfrak{S}v\,.\,\mathfrak{S}'u}{1 - \frac{\mathfrak{S}^2 u\,.\,\mathfrak{S}^2 v}{\varepsilon_1^2\,.\,\varepsilon_2^2}}.$$

Damit ist das Additionstheorem der $\mathfrak{S}$-Funktion gefunden.

Benützen wir eine 3. Additionsgleichung[1]) der Sigmafunktionen und formen sie analog um wie 1), so erhalten wir für gerade $\mathfrak{S}$-Funktionen:

9) $$\mathfrak{S}_{\beta\gamma}(u+v) =$$

$$= \frac{\mathfrak{S}_{\beta\gamma}(u)\,.\,\mathfrak{S}_{\beta\gamma}(v) - (e_\beta - e_\gamma)\,\mathfrak{S}_{0\gamma}(u)\,.\,\mathfrak{S}_{\alpha\gamma}(u)\,.\,\mathfrak{S}_{0\gamma}(v)\,.\,\mathfrak{S}_{\alpha\gamma}(v)}{1 - (e_\beta - e_\gamma)(e_\alpha - e_\gamma)\,\mathfrak{S}_{0\gamma}^2(u)\,.\,\mathfrak{S}_{0\gamma}^2(v)}.$$

Werden hierin die Indices so gewählt, dass sie je links den Funktionen $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{D}$ § 7, 3) entsprechen, so folgen daraus als Additionsgleichungen der $\mathfrak{C}$- und $\mathfrak{D}$-Funktion

10) $$\mathfrak{C}(u+v) = \frac{\mathfrak{C}u\,.\,\mathfrak{C}v - 1/\varepsilon_1^2\,.\,\mathfrak{S}u\,.\,\mathfrak{S}v\,.\,\mathfrak{D}u\,.\,\mathfrak{D}v}{1 - 1/\varepsilon_1^2\,\varepsilon_2^2\,.\,\mathfrak{S}^2 u\,.\,\mathfrak{S}^2 v},$$

[1]) Burkhardt § 35. 9). S. 92.

11) $$\mathfrak{D}(u+v) = \begin{matrix} \mathfrak{D}u \,.\, \mathfrak{D}v & 1/\varepsilon_2^2 \,.\, \mathfrak{S}u \,.\, \mathfrak{S}v \,.\, \mathfrak{C}u \,.\, \mathfrak{C}v \\ 1 & 1/\varepsilon_1^2\,\varepsilon_2^2 \,.\, \mathfrak{S}^2 u \,.\, \mathfrak{S}^2 v \end{matrix}.$$

Diese Werte in die Gleichung § 7, 4) eingeführt, liefern nach geringer Umformung das Additionstheorem für den Differentialquotienten $\mathfrak{S}'$.

12) $$\mathfrak{S}'(u+v) =$$

$$\frac{1}{(1 - 1/\varepsilon_1^2\,\varepsilon_2^2 \,.\, \mathfrak{S}^2 u \,.\, \mathfrak{S}^2 v)^2}\Big\{\mathfrak{S}'u \,.\, \mathfrak{S}'v \,.\, (1 + 1/\varepsilon_1^2\,\varepsilon_2^2 \,.\, \mathfrak{S}^2 u \,.\, \mathfrak{S}^2 v) -$$

$$\mathfrak{S}u \,.\, \mathfrak{S}v \left[\frac{1}{\varepsilon_1^2}\left(1 \quad \frac{\mathfrak{S}^2 u}{\varepsilon_2^2}\right)\left(1 \quad \frac{\mathfrak{S}^2 v}{\varepsilon_2^2}\right) + \frac{1}{\varepsilon_2^2}\left(1 \quad \frac{\mathfrak{S}^2 u}{\varepsilon_1^2}\right)\left(1 \quad \frac{\mathfrak{S}^2 v}{\varepsilon_1^2}\right)\right]\Big\}.$$

Die Gleichungen 8) und 12) ergeben als Resultat dieses Paragraphen:

Die $\mathfrak{S}$-Funktion der Summe $(u+v)$ und ihr erster Differentialquotient lassen sich rational darstellen durch die $\mathfrak{S}$-Funktionen der einzelnen Summanden u und v und deren erste Differentialquotienten.

§ 10.

Multiplikation der Funktionen $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{S}'$.

Die Multiplikation einer Funktion ist durchgeführt, wenn die Funktion für das mehrfache Argument dargestellt ist durch die Funktion des einfachen Arguments und konstante Grössen; in unserm Fall, wenn $\mathfrak{S}(nu)$ dargestellt ist durch $\mathfrak{S}(u)$, ε_1^2, ε_2^2 und rationale Zahlen.

Wir gehen induktiv vor, indem wir zuerst die Multiplikation für $n = 1, 2, 3, \ldots$ durchführen und daraus auf das allgemeine Gesetz schliessen. Dabei sondern wir sofort die rationalen Funktionen von $\mathfrak{S}^2(u)$ ab und bezeichnen sie allgemein mit R, dem in speziellen Fällen noch Indices beigegeben werden. Die expliziten Werte von R sind für die ersten Fälle in der Tabelle S. 41 ff. aufgeführt. Dann ist auch, was hier vorausgeschickt werden soll

1) $$\mathfrak{S}'^2(u) = \left(1 - \frac{\mathfrak{S}^2(u)}{\varepsilon_1^2}\right) \cdot \left(1 \quad \frac{\mathfrak{S}^2(u)}{\varepsilon_2^2}\right) = \mathrm{R}.$$

Zur Abkürzung setzen wir noch $\mathfrak{S}(u) = \mathfrak{S}$ und $\mathfrak{S}'(u) \quad \mathfrak{S}'$, und beginnen dann mit dem Fall $n = 2$:

1.⁰ In der Gleichung 8) des letzten Paragraphen $v - u$ gesetzt, gibt

$$\mathfrak{S}(2u) = \frac{2 \cdot \mathfrak{S} \cdot \mathfrak{S}'}{1 - \frac{\mathfrak{S}^4}{\varepsilon_1^2 \varepsilon_2^2}} \text{ oder}$$

2) $$\mathfrak{S}(2u) = \mathfrak{S} \cdot \mathfrak{S}' \cdot R_2;$$

daraus folgt

$$2\,\mathfrak{S}'(2u) \quad \mathfrak{S}'^2 \cdot R_2 \mid \mathfrak{S} \cdot \mathfrak{S}'' \cdot R_2 + \mathfrak{S} \cdot \mathfrak{S}' \cdot \frac{d R_2}{d \mathfrak{S}^2} \cdot 2\,\mathfrak{S} \cdot \mathfrak{S}'.$$

Wird für $\mathfrak{S}''$ der in § 6, 2) gefundene Wert eingesetzt und 1) berücksichtigt, so erkennt man, dass alle 3 Summanden der rechten Seite rationale Funktionen von $\mathfrak{S}^2$ allein sind, also

3) $$\mathfrak{S}'(2u) = R$$

gesetzt werden kann.

2.⁰ In der Gleichung 8) des letzten Paragraphen $v = 2u$ gesetzt, gibt

$$\mathfrak{S}(3u) = \frac{\mathfrak{S} \cdot \mathfrak{S}'(2u) + \mathfrak{S}(2u) \cdot \mathfrak{S}'}{1 - \frac{\mathfrak{S}^2 \cdot \mathfrak{S}^2(2u)}{\varepsilon_1^2 \varepsilon_2^2}},$$

und wenn man 1), 2) und 3) einsetzt,

4) $$\mathfrak{S}(3u) = \mathfrak{S} \cdot R_3;$$

daraus bekommt man als Differentialquotienten

$$3\,\mathfrak{S}'(3u) = \mathfrak{S}' \cdot R_3 + \mathfrak{S} \cdot \frac{d R_3}{d \mathfrak{S}^2} \cdot 2 \cdot \mathfrak{S} \cdot \mathfrak{S}',$$

oder

5) $$\mathfrak{S}'(3u) = \mathfrak{S}' \cdot R.$$

3.⁰ In der Gleichung 8) des letzten Paragraphen $v = 3u$ gesetzt, gibt

$$\mathfrak{S}(4u) = \frac{\mathfrak{S} \cdot \mathfrak{S}'(3u) + \mathfrak{S}(3u) \cdot \mathfrak{S}'}{1 - \frac{\mathfrak{S}^2 \cdot \mathfrak{S}^2(3u)}{\varepsilon_1^2 \varepsilon_2^2}},$$

6) $$\mathfrak{S}(4u) = \mathfrak{S} \,.\, \mathfrak{S}' \,.\, \mathrm{R}_4$$

und

7) $$\mathfrak{S}'(4u) = \mathrm{R},$$

Setzt man die Rechnung in dieser Weise fort, so erhält man

8) $$\mathfrak{S}(5u) = \mathfrak{S} \,.\, \mathrm{R},$$

9) $$\mathfrak{S}'(5u) = \mathfrak{S}' \,.\, \mathrm{R}$$

und allgemein

10) $$\begin{aligned} \mathfrak{S}(nu) &= \mathfrak{S} \,.\, \mathfrak{S}' \,.\, \mathrm{R}_n(\mathfrak{S}^2), \quad n \text{ gerade.} \\ &= \mathfrak{S} \,.\, \mathrm{R}_n(\mathfrak{S}^2), \quad n \text{ ungerade.} \end{aligned}$$

In dieser Gleichung ist das gesuchte Multiplikationstheorem enthalten: Die Funktion $\mathfrak{S}(nu)$ ist eine rationale Funktion von $\mathfrak{S}^2(u)$, die bei geradem n mit $\mathfrak{S}u$ $\mathfrak{S}'u$, bei ungeradem n mit $\mathfrak{S}$ multipliziert ist.

Zugleich erhält man durch Differentiation von 10)

11) $$\begin{aligned} \mathfrak{S}'(nu) &= \mathrm{R}'_n(\mathfrak{S}^2), \quad n \text{ gerade;} \\ &= \mathfrak{S}' \,.\, \mathrm{R}'_n(\mathfrak{S}^2), \; n \text{ ungerade;} \end{aligned}$$

in Worten: Die Funktion $\mathfrak{S}'(nu)$ lässt sich als rationale Funktion von $\mathfrak{S}^2(u)$ darstellen, die bei ungeradem n noch mit $\mathfrak{S}'(u)$ multipliziert ist.

Zur Veranschaulichung seien hier die Funktionswerte der niedrigsten Vielfachen des Arguments u beigefügt. Es ist vorteilhaft zugleich $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{D}$ einzuführen, weil sich die Rechnung viel übersichtlicher gestaltet, und sofort auch $\mathfrak{S}'(nu)$ durch Multiplikation § 7, 4) gebildet werden kann. Zur Abkürzung ist gesetzt $\varepsilon_1^2 = a$ und $\varepsilon_2^2 = b$.

Man erhält

$$n = 2$$

12) $$\mathfrak{S}(2u) = \frac{2 \,.\, \mathfrak{S} \,.\, \sqrt{\left(1 - \frac{\mathfrak{S}^2}{a}\right)\left(1 - \frac{\mathfrak{S}^2}{b}\right)}}{N_2} = \frac{2\,\mathfrak{S} \,.\, \mathfrak{C} \,.\, \mathfrak{D}}{N_2}$$

13) $$\mathfrak{C}(2u) = \frac{1 - 2\frac{\mathfrak{S}^2}{a} + \frac{\mathfrak{S}^4}{ab}}{N_2} = \frac{\mathfrak{C}^2 - \frac{1}{\varepsilon_1^2}\mathfrak{S}^2 \,.\, \mathfrak{D}^2}{N_2}$$

14) $$\mathfrak{D}(2u) = \frac{1 - 2\frac{\mathfrak{S}^2}{b} + \frac{\mathfrak{S}^4}{a\,b}}{N_2} = \frac{\mathfrak{D}^2 - \frac{1}{\varepsilon_2^2}\mathfrak{S}^2 \cdot \mathfrak{C}^2}{N_2}$$

15) $$\mathfrak{S}'(2u) = \frac{1}{2N_2^2}\left\{1 - 2\frac{a+b}{a\,b}\mathfrak{S}^2 + 6\frac{\mathfrak{S}^4}{a\,b} - 2\frac{a+b}{a^2\,b^2}\mathfrak{S}^6 + \frac{\mathfrak{S}^8}{a^2\,b^2}\right\}$$

16) $$N_2 = 1 - \frac{\mathfrak{S}^4}{a\,b}$$

— $u = 3$ —

17) $$\frac{\mathfrak{S}(3u)}{\mathfrak{S}} = \frac{1}{N_3}\left\{3 - \frac{4(a+b)}{a\,b}\mathfrak{S}^2 + \frac{6\,\mathfrak{S}^4}{a\,b} - \frac{\mathfrak{S}^8}{a^2\,b^2}\right\}$$

18) $$\frac{\mathfrak{C}(3u)}{\mathfrak{C}} = \frac{1}{N_3}\left\{1 - \frac{4\,\mathfrak{S}^2}{a} + \frac{6\,\mathfrak{S}^4}{a\,b} - \frac{4\,\mathfrak{S}^6}{a^2\,b} + \frac{\mathfrak{S}^8}{a^2\,b^2}\right\}$$

19) $$\frac{\mathfrak{D}(3u)}{\mathfrak{D}} = \frac{1}{N_3}\left\{1 - \frac{4\,\mathfrak{S}^2}{b} + \frac{6\,\mathfrak{S}^4}{a\,b} - \frac{4\,\mathfrak{S}^6}{a\,b^2} + \frac{\mathfrak{S}^8}{a^2\,b^2}\right\}$$

20) $$\frac{\mathfrak{S}'(3u)}{\mathfrak{S}'(u)} = \frac{1}{3N_2^2}\left\{1 - \frac{4(a+b)}{a\,b}\mathfrak{S}^2 + \frac{28\,\mathfrak{S}^4}{a\,b} - \frac{28(a+b)}{a^2\,b^2}\mathfrak{S}^6 + \right.$$

$$\left. + \frac{70\,\mathfrak{S}^8}{a^2\,b^2} - \frac{28(a+b)}{a^3\,b^3}\mathfrak{S}^{10} + \frac{28\,\mathfrak{S}^{12}}{a^3\,b^3} - \frac{4(a+b)}{a^4\,b^4}\mathfrak{S}^{14} + \frac{\mathfrak{S}^{16}}{a^4\,b^4}\right\}$$

21) $$N_3 = 1 - \frac{6}{a\,b}\mathfrak{S}^4 + \frac{4(a+b)}{a^2\,b^2}\mathfrak{S}^6 - \frac{3\,\mathfrak{S}^8}{a^2\,b^2}$$

— $n = 4$ —

22) $$\mathfrak{S}(4u) = \frac{4\,\mathfrak{S}\cdot\mathfrak{S}'}{N_4}\left\{1 - \frac{2(a+b)}{a\,b}\mathfrak{S}^2 + \frac{5\,\mathfrak{S}^4}{a\,b} - \frac{5\,\mathfrak{S}^8}{a^2\,b^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{2(a+b)}{a^3\,b^3}\mathfrak{S}^{10} - \frac{\mathfrak{S}^{12}}{a^3\,b^3}\right\}$$

23) $$\mathfrak{C}(4u) = \frac{1}{N_4}\left\{1 - \frac{8}{a}\mathfrak{S}^2 + \frac{20\,a+8\,b}{a^2\,b}\mathfrak{S}^4 - \frac{32\,a+36\,b}{a^2\,b^2}\mathfrak{S}^6 + \right.$$

$$+\frac{16\,a+102\,b}{a^2\,b^3}\,\mathfrak{S}^8-\frac{80\,a+48\,b}{a^3\,b^3}\,\mathfrak{S}^{10}+\frac{68\,a+8\,b}{a^4\,b^3}\,\mathfrak{S}^{12}$$

$$-\frac{20}{a^4\,b^3}\,\mathfrak{S}^{14}+\frac{\mathfrak{S}^{16}}{a^4\,b^4}\Big\}$$

24) $$\mathfrak{D}\,(4\,u)=\frac{1}{N_4}\Big\{1-\frac{8}{b}\,\mathfrak{S}^2+\frac{20\,b+8\,a}{a\,b^2}\,\mathfrak{S}^4-\frac{32\,b+36\,a}{a^2\,b^2}\,\mathfrak{S}^6+$$

$$+\frac{16\,b+102\,a}{a^2\,b^2}\,\mathfrak{S}^8-\frac{80\,b+48\,a}{a^3\,b^3}\,\mathfrak{S}^{10}+\frac{68\,b+8\,a}{a^3\,b^4}\,\mathfrak{S}^{12}$$

$$-\frac{20}{a^3\,b^4}\,\mathfrak{S}^{14}+\frac{\mathfrak{S}^{16}}{a^4b^4}\Big\}$$

25) $$N_4=1-\frac{20\,\mathfrak{S}^4}{a\,b}+\frac{32\,(a+b)}{a^2\,b^2}\,\mathfrak{S}^6-\frac{32\,a^2+32\,b^2+90\,a\,b}{a^3\,b^3}\,\mathfrak{S}^8$$

$$\frac{\mathfrak{S}^{16}}{a^4\,b^4}+\frac{20\,\mathfrak{S}^{12}}{a^3\,b^3}-\frac{32\,(a+b)}{a^3\,b^3}\,\mathfrak{S}^{10}+$$

26) $$\mathfrak{S}'\,(4\,u)=\frac{1}{4\,N_4^2}\Big\{1-\frac{8\,(a+b)}{a\,b}\,\mathfrak{S}^2+\frac{(8\,a^2+8\,b^2+104\,a\,b)}{a^2\,b^2}\,\mathfrak{S}^4$$

$$-\frac{292\,(a+b)}{a^2\,b^2}\,\mathfrak{S}^6+\frac{432\,a^2+432\,b^2+1244\,a\,b}{a^3\,b^3}\,\mathfrak{S}^8$$

$$-\frac{384\,a^3+384\,b^3+2592\,a^2\,b+2592\,a\,b^2}{a^4\,b^4}\,\mathfrak{S}^{10}+$$

$$+\frac{128\,a^4+128\,b^4+3036\,a^3\,b+3036\,a\,b^3+5468\,a^2\,b^2}{a^5\,b^5}\,\mathfrak{S}^{12}$$

$$-\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;+\frac{\mathfrak{S}^{32}}{a^8\,b^8}\Big\}$$

$n=5$

27) $$\frac{\mathfrak{S}\,(5\,u)}{\mathfrak{S}}=\frac{1}{N_5}\Big\{5-\frac{20\,(a+b)}{a\,b}\,\mathfrak{S}^2+\frac{16\,a^2+16\,b^2+94\,a\,b}{a^2\,b^2}\,\mathfrak{S}^4-$$

$$-\frac{80\,(a+b)}{a^2\,b^2}\,\mathfrak{S}^6-\frac{105\,\mathfrak{S}^8}{a^2\,b^2}+\frac{360\,(a+b)}{a^3\,b^3}\,\mathfrak{S}^{10}-$$

$$240\,a^2 + 240\,b^2 + 57900\,a\,b\,\mathfrak{S}^{12} + 64\,(a+b)^3 + 368\,(a+b)\,a\,b\,\mathfrak{S}^{14}$$

$$160\,(a+b)^2 + 125\,a\,b\,\mathfrak{S}^{16} + 140\,(a+b)\,\mathfrak{S}^{18}$$

$$50\,\mathfrak{S}^{20} + \mathfrak{S}^{24}\Big\}$$

28) $N_5 - 5\,\mathfrak{S}^{24} \quad 20\,(a+b)\,\mathfrak{S}^{22} + 16\,a^2 + 16\,b^2 + 94\,a\,b\,\mathfrak{S}^{20}$

$$80\,(a+b)\,\mathfrak{S}^{18} \quad 105\,\mathfrak{S}^{16} + 360\,(a+b)\,\mathfrak{S}^{14}$$

$$240\,(a^2+b^2) + 57900\,a\,b\,\mathfrak{S}^{12} + 64\,(a+b)^3 + 368\,(a+b)\,a\,b\,\mathfrak{S}^{10}$$

$$160\,(a+b)^2 + 125\,a\,b\,\mathfrak{S}^8 + 140\,(a+b)\,\mathfrak{S}^6 \quad 50\,\mathfrak{S}^4 + 1$$

Nun suchen wir allgemeine Resultate herzuleiten.

a) Wir verstehen unter p und q rationale Funktionen von $\mathfrak{S}^2$ allein und setzen

$$\mathfrak{S}\,(2\,u) = \mathfrak{S}\,\mathfrak{S}'\frac{p_2}{q_2}, \text{ woraus } \mathfrak{S}'\,(2\,u) = \frac{p'_2}{q_2^2}.$$

Durch § 9, 8) und Differentiation wird

$$\mathfrak{S}\,(3\,u) = \mathfrak{S}\,\frac{p_3}{q_3}, \qquad \mathfrak{S}'\,(3\,u) = \mathfrak{S}'\,\frac{p'_3}{q_3^2},$$

$$\mathfrak{S}\,(4\,u) \quad \mathfrak{S}\,\mathfrak{S}'\frac{p_4}{q_4}; \qquad \mathfrak{S}'\,(4\,u) \quad \frac{p'_4}{q_4^2}.$$

Der Schluss von n auf $n+1$ ergibt

29)
$$\mathfrak{S}\,(n\,u) = \mathfrak{S}\,\mathfrak{S}'\frac{p\,(\mathfrak{S}^2)}{q\,(\mathfrak{S}^2)}, \quad \mathfrak{S}'\,(n\,u) = \frac{p'\,(\mathfrak{S}^2)}{q^2\,(\mathfrak{S}^2)}, \quad n \text{ gerade};$$

$$= \mathfrak{S}\,\frac{p\,(\mathfrak{S}^2)}{q(\mathfrak{S}^2)}, \qquad = \mathfrak{S}'\frac{p'\,(\mathfrak{S}^2)}{q^2\,(\mathfrak{S}^2)}, \quad n \text{ ungerade.}$$

b) Das von $\mathfrak{S}$ unabhängige Glied von q_2 ist 1. Bei der Bildung von q_3 multiplizieren wir $1 - \frac{\mathfrak{S}^2}{a\,b} \cdot \frac{p_2^2}{q_2^2}$ mit q_2^2, wodurch q_3 und allgemein q_n als unabhängiges Glied 1 bekommt.

c) In § 19, 3) für z die Reihenentwicklung gesetzt und bei Π^2 nur das konstante Glied 1 berücksichtigt, gibt

$$\mathfrak{S}(u) = u + (\text{nicht lineare Glieder von } u)$$
$$\mathfrak{S}(nu) = nu + (\quad „ \quad „ \quad „ \quad „ \quad „)$$

Da p und q gerade Funktionen von $\mathfrak{S}$ sind, und 1 das konstante Glied von q ist, beginnt $\mathfrak{S}(nu)$ mit $\mathfrak{S}\mathfrak{S}'(n \mid \ldots)$ oder $\mathfrak{S}(n + \ldots)$.

d) Ueber Grad und Zeichen der höchsten Potenzen von p und q, die Faktoren $\mathfrak{S}$ resp. $\mathfrak{S}\mathfrak{S}'$ inbegriffen, gibt die aus § 10, 8) fliessende Gleichung

$$30) \qquad \mathfrak{S}(u+v)\,\mathfrak{S}(u-v) = \frac{\mathfrak{S}^2 u - \mathfrak{S}^2 v}{1 - \frac{1}{a\,b}\mathfrak{S}^2 u\,\mathfrak{S}^2 v}$$

oder

$$30^a) \qquad \mathfrak{S}[(n+1)u] = \frac{\mathfrak{S}^2(nu) - \mathfrak{S}^2(u)}{\mathfrak{S}[(n-1)u]\left(1 - \frac{1}{a\,b}\mathfrak{S}^2(nu)\,\mathfrak{S}^2(u)\right)}$$

Aufschluss.

Schreiben wir nur Vorzeichen und Grad der höchsten Potenz, so können wir setzen:

$$p_1^* = 1, \quad p_2^* = 3, \quad p_3^* = -9$$
$$q_1^* = 0, \quad q_2^* = -4, \quad q_3^* = -8$$

Dann ergibt 30^a) durch Schluss von n auf $n+1$

$$p_4^* = -15, \quad p_5^* = 25, \quad p_6^* = 35, \quad p_7^* = -49$$
$$q_4^* = 16, \quad q_5^* = 24, \quad q_6^* = -36, \quad q_7^* = -48$$

und allgemein

$$31) \qquad \begin{aligned} p_n^* &= -(n^2-1), & q_n^* &= +n^2 \quad , & &\equiv 0, \text{ mod } 4,\\ &= +n^2 \quad , & &= +(n^2-1), & &\equiv 1, \quad „ \quad 4,\\ &= +(n^2-1), & &= -n^2 \quad , & &\equiv 2, \quad „ \quad 4,\\ &= -n^2 \quad , & &= -(n^2-1), & &\equiv 3, \quad „ \quad 4. \end{aligned}$$

e) Wird für ungerade n in 29) $\mathfrak{S}(nu)$ als gegeben und $\mathfrak{S}(u) = x$ als Variable betrachtet, so ergibt sich nach 31) eine Gleichung vom Grad n^2.

$$32) \qquad \mathfrak{S}(nu) \cdot q(x^2) - x \cdot p(x^2) = 0.$$

Da in der Funktion $q(x^2)$ das von x freie Glied 1 ist, so ist $\mathfrak{S}(nu)$ das konstante Glied dieser Gleichung. Sind ihre Wurzeln $x_1, x_2, \ldots x_{n^2}$, so ist vom Vorzeichen abgesehen das konstante Glied gleich dem Produkt dieser Wurzeln, wenn noch die höchste

Potenz von x den Koeffizienten 1 hat. Da dies nach b) erfüllt ist, so wird

33) $$\mathfrak{S}(n\,u) = \prod_{\nu=1}^{n^2} x_\nu \quad .$$

f) Setzen wir u gleich einer Periode, so wird $\mathfrak{S}(n\,u) = 0$, und es bleibt in 33)

$$p(x^2) = 0,$$

worin das von x freie Glied n beträgt, und die höchste Potenz von x und zwar x^{n^2-1} den Koeffizienten 1 hat. Sind $x_1, x_2, \ldots x_{n^2-1}$ die Wurzeln von $p(x^2)$, so ist wieder das konstante Glied gleich dem Produkt der Wurzeln, also

33a) $$(-1)^{\frac{n-1}{2}}\, n = \prod_{\nu=1}^{n^2-1} x_\nu \,,$$

wobei 31) und 39a) das Vorzeichen bestimmt.

g) Nach § 7, 10) ist

34) $$\frac{\mathfrak{S}\left(u+\frac{\omega_3}{2}\right)}{\sqrt{\varepsilon_1\,\varepsilon_2}} = +\frac{\sqrt{\varepsilon_1\,\varepsilon_2}}{\mathfrak{S}(u)}.$$

Setzt man in der Gleichung 29) [n ungerade] $u+\frac{\omega_3}{2}$ an Stelle von u und wendet diese Beziehung an, so ergibt sich, wenn wir vorerst vom Zeichen absehen

$$\frac{\sqrt{\varepsilon_1\,\varepsilon_2}}{\mathfrak{S}(n\,u)} = \frac{\sqrt{\varepsilon_1\,\varepsilon_2}}{\mathfrak{S}(u)} \cdot \frac{p\left(\frac{\varepsilon_1\,\varepsilon_2}{\mathfrak{S}^2\,u}\right)}{q\left(\frac{\varepsilon_1\,\varepsilon_2}{\mathfrak{S}^2\,u}\right)};$$

darin schreiben wir zur Abkürzung

35) $$\frac{\mathfrak{S}(u)}{\sqrt{\varepsilon_1\,\varepsilon_2}} = s\,u$$

und erhalten

36) $$\frac{1}{s(n\,u)} = \frac{1}{s(u)} \cdot \frac{p\left(\frac{1}{s^2\,u}\right)}{q\left(\frac{1}{s^2\,u}\right)}.$$

Machen wir dieselbe Substitution 35) im reziproken Wert der Gleichung 29), so geht dieser über in

37) $$\frac{1}{s(n\,u)} = \frac{1}{s(u)} \cdot \frac{q[s^2(u)]}{p[s^2(u)]}.$$

Aus 36) und 37) folgt

38) $$p(s^2) \cdot p\left(\frac{1}{s^2}\right) = q(s^2) \cdot q\left(\frac{1}{s^2}\right).$$

Die Funktionen p und q sind vom Grad $n^2 - 1$ und haben keinen gemeinschaftlichen Teiler [1]). Daher ist die Gleichung 38) nur möglich, wenn von dem Faktor ± 1 abgesehen

39) ist. $$s^{n^2-1} \cdot p\left(\frac{1}{s^2}\right) = q(s^2)$$

Bei der Bestimmung des Vorzeichens von $q(s^2)$ erinnern wir uns, dass bei der Herleitung der Multiplikationsformeln immer auch $\mathfrak{S}'(u)$ mit den Perioden $2\omega_1$ und $2\omega_3$ § 7 in die Rechnung gezogen wird. Die erhaltenen Funktionen $\mathfrak{S}(nu)$ sind daher periodisch im Parallelogramm $2\omega_1$, $2\omega_3$ (S. 29), und 34) geht über in

$$\frac{\mathfrak{S}\left[n\left(u+\frac{\omega_3}{2}\right)\right]}{\sqrt{\varepsilon_1 \varepsilon_2}} = \pm \frac{\sqrt{\varepsilon_1 \varepsilon_2}}{\mathfrak{S}(u)}.$$

Nun ändert $\mathfrak{S}(nu)$ bei Vermehrung um ungerade ganze ω_3 das Zeichen. Ist daher $\frac{n-1}{2}$ gerade, so gilt das positive, ungerade das negative Zeichen, und 39) lautet

39*) $$s^{n^2-1} \cdot p\left(\frac{1}{s^2}\right) = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \cdot q(s^2).$$

Setzen wir dies ein, so erhält die Gleichung 29) folgende einfache Form

40) $$\mathfrak{S}(nu) = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \cdot \frac{\mathfrak{S}(u)}{\sqrt{\varepsilon_1 \varepsilon_2}} \cdot n^2 + 2 \cdot \frac{p\left[\left(\frac{\mathfrak{S}u}{\sqrt{\varepsilon_1 \varepsilon_2}}\right)^2\right]}{p\left[\left(\frac{\sqrt{\varepsilon_1 \varepsilon_2}}{\mathfrak{S}u}\right)^2\right]},$$

worin nur noch die Funktion p auftritt.

Durch Einführung der Funktion S werden im übernächsten Paragraphen diese Beziehungen übersichtlicher dargestellt.

§ 11.

Herleitung der Multiplikationsformeln mit Hilfe der Potenzreihenentwicklung.

Die Potenzreihe in § 6, 4) und die Gleichung 40) des letzten Paragraphen ergeben eine Möglichkeit, bei ungeradem n Multiplikationsformeln herzuleiten, ohne die Addition zu benützen.

[1]) Vergleiche § 16. Irreduzibilität.

1) Dabei setzen wir wieder $s(u) = \frac{\mathfrak{S}(u)}{\sqrt{\varepsilon_1 \varepsilon_2}}$ und bezeichnen die Koeffizienten der Funktion $p(s^2 u)$ mit $p_1, p_3, \ldots p_{n^2-2}$. Dann geht 40) über in

$$2)\quad s(un) = (-1)^{n-1} \cfrac{p_1 \cdot s + p_3 \cdot s^3 + \ldots + p_{n^2-2} \cdot s^{n^2-2} + s^{n^2}}{1 + p_{n^2-2} \cdot s^2 + \ldots + p_3 \cdot s^{n^2-3} + p_1 \cdot s^{n^2-1}}.$$

Durch dieselbe Substitution geht § 6, 4) über in

$$3)\quad s(u) = \frac{u}{\sqrt{\varepsilon_1 \varepsilon_2}} - \frac{\mathfrak{S}}{3!\,\mathfrak{p} \cdot \sqrt{\varepsilon_1 \varepsilon_2}} \cdot u^3 + \frac{\mathfrak{S}^2 + 12\,\mathfrak{p}}{5!\,\mathfrak{p}^2} \cdot \frac{u^5}{\sqrt{\varepsilon_1 \varepsilon_2}} + \ldots$$

Entwickeln wir beide Seiten von 2) nach 3) in Potenzreihen und vergleichen die Koeffizienten gleich hoher Potenzen von u mit einander, so ergeben sich Bestimmungsgleichungen für die Grössen $p_1, p_3, \ldots$

Die Rechnung sei für $n = 3$ durchgeführt:

Dann lautet 2)

$$4)\quad -(1 + p_7 \cdot s^2 + p_5 \cdot s^4 + p_3 \cdot s^6 + p_1 \cdot s^8) \cdot s(3u) = p_1 \cdot s + p_3 \cdot s^3 + p_5 \cdot s^5 + p_7 \cdot s^7 + s^9.$$

Dabei sagt das Vorzeichen, dass dieselben p verschiedene Zeichen haben, und aus früherem wissen wir, dass $p_7 = 0$ wird.

Bei der Entwicklung fällt als höchste Potenz noch $\mathfrak{S}^5$ in Betracht, und wir haben also nur noch u^5 zu berücksichtigen. Dafür ergibt 3)

$$s^2(u) = \frac{u^2}{\varepsilon_1 \varepsilon_2} - \frac{2\,\mathfrak{S}}{3!\,\mathfrak{p}} \cdot \frac{u^4}{\varepsilon_1 \varepsilon_2} + \ldots$$

$$s^3(u) = \frac{u^3}{\sqrt{\varepsilon_1 \varepsilon_2}^3} - \frac{3\,\mathfrak{S}}{3!\,\mathfrak{p}} \cdot \frac{u^5}{\sqrt{\varepsilon_1 \varepsilon_2}^3} + \ldots$$

$$s^4(u) = \frac{u^4}{(\varepsilon_1 \varepsilon_2)^2} + \ldots \quad s^5(u) = \frac{u^5}{\sqrt{\varepsilon_1 \varepsilon_2}^5} + \ldots.$$

Werden diese Grössen in 4) eingeführt, so ergibt die Vergleichung der Koeffizienten von

$$u: \frac{3}{\sqrt{\varepsilon_1 \varepsilon_2}} \quad \frac{p_1}{\sqrt{\varepsilon_1 \varepsilon_2}}: \qquad p_1 = 3.$$

$$u^3\colon \frac{27}{\sqrt{\varepsilon_1\,\varepsilon_2}}\cdot\frac{\mathfrak{S}}{3!\,\mathfrak{p}}+0=-\frac{p_1}{\sqrt{\varepsilon_1\,\varepsilon_2}}\cdot\frac{\mathfrak{S}}{3!\,\mathfrak{p}}+\frac{p_3}{\sqrt{\varepsilon_1\,\varepsilon_2^{\,3}}}.$$

Erinnern wir uns, dass

$$\mathfrak{S}=\varepsilon_1^{\,2}+\varepsilon_2^{\,2}=a+b,\qquad \mathfrak{p}=\varepsilon_1^{\,2}\,\varepsilon_2^{\,2}=a\,b$$

ist, so wird

$$p_3=\frac{4\,(a+b)}{\varepsilon_1\,\varepsilon_2}.$$

$$u^5\colon 243\cdot\frac{\mathfrak{S}^2+12\,\mathfrak{p}}{5!\,\mathfrak{p}^2\sqrt{\varepsilon_1\,\varepsilon_2}}-\frac{3\,p_5}{\sqrt{\varepsilon_1\,\varepsilon_2^{\,5}}}=p_1\cdot\frac{\mathfrak{S}^2+12\,\mathfrak{p}}{5!\,\mathfrak{p}^2\sqrt{\varepsilon_1\,\varepsilon_2}}$$

$$p_3\cdot\frac{3\,\mathfrak{S}}{3!\,\mathfrak{p}\sqrt{\varepsilon_1\,\varepsilon_2^{\,3}}}+\frac{p_5}{\sqrt{\varepsilon_1\,\varepsilon_2^{\,5}}};$$

$$p_5=\frac{6}{\sqrt{a\,b}}.$$

Die gefundenen Koeffizienten in 4) eingesetzt und berücksichtigt, dass $s(u)=\frac{\mathfrak{S}}{\sqrt[4]{a\,b}}$ ist,

5) $$\left(1-\frac{6}{a\,b}\,\mathfrak{S}^4+4\cdot\frac{a+b}{a^2\,b^2}\cdot\mathfrak{S}^6-3\cdot\frac{\mathfrak{S}^8}{a^2\,b^2}\right)\cdot\mathfrak{S}\,(3\,u)$$

$$=3\,\mathfrak{S}-4\cdot\frac{a+b}{a\,b}\cdot\mathfrak{S}^3+\frac{6\,\mathfrak{S}^5}{a\,b}-\frac{\mathfrak{S}^9}{a^2\,b^2}.$$

Damit ist § 10, 17) und 21) auf andere Weise gefunden. Analog lassen sich $\mathfrak{S}\,(5\,u)$, $\mathfrak{S}\,(7\,u)$. . . . bestimmen; aber die rechnerischen Schwierigkeiten werden schon bei $\mathfrak{S}\,(5\,u)$ sehr gross.

§ 12.

Addition und Multiplikation der Funktionen S und S′.

Wird vorerst statt dem Argument w [§ 8, 6)] in der Funktion S die Variable u beibehalten, so erhalten wir nach Definition [§ 8, 10)][1])

1) $$\mathrm{S}\,(u)=\mathfrak{S}^2\,(u).$$

Gestützt auf die Paragraphen 9 und 10 lässt sich nun leicht das Additions- und Multiplikationstheorem für S und S′ herleiten:

[1]) Wir bleiben vorerst bei $\mathrm{S}\,(u)$, weil diese Funktion in den letzten Paragraphen fortwährend als $\mathfrak{S}^2(u)$ auftritt.

Wird die Gleichung § 9, 8) quadriert und S eingeführt, so ergibt sich, da $2\,\mathfrak{S}\,u\,.\,\mathfrak{S}'u = S'(u)$,

$$2) \qquad S(u+v) = \frac{(S\,u\,.\,S'\,v + S\,v\,.\,S'u)^2}{4\,S\,u\,.\,S\,v\left(1 - \frac{S\,u\,.\,S\,v}{\varepsilon_1^2\,.\,\varepsilon_2^2}\right)^2};$$

d. h. die S-Funktion zweier Argumente kann rational ausgedrückt werden durch die S-Funktionen der einzelnen Summanden und ihre ersten Differentialquotienten.

Durch Quadrieren von § 10, 10) erhält man

$$3) \qquad S(u\,u) = R(S\,u)$$

und erkennt, dass die S-Funktion jedes beliebigen ganzen Vielfachen des Arguments dargestellt werden kann als rationale Funktion der S-Funktion des einfachen Arguments.

Nun soll analog wie für S auch für S′ ein Additions- und Multiplikationstheorem hergeleitet werden. Zu bestimmen ist

$$S'(u+v) = 2\,\mathfrak{S}\,(u+v)\,.\,\mathfrak{S}'(u+v)$$

und

$$S'(u\,u) = 2\,\mathfrak{S}\,(u\,u)\,.\,\mathfrak{S}'(u\,u).$$

Wir verwenden zuerst die Gleichungen § 9, 8) und 12) und erhalten nach einiger Umformung:

$$4) \qquad S'(u+v) = -\frac{1}{\left(1 - \frac{S\,u\,.\,S\,v}{\varepsilon_1\,\varepsilon_2}\right)^3}\left\{\left(1 + \frac{S\,u\,.\,S\,v}{\varepsilon_1^2\,\varepsilon_2^2}\right)\left|\left(1 - \frac{S\,v}{\varepsilon_1^2}\right)\left(1 - \frac{S\,v}{\varepsilon_2^2}\right).S'u\right.\right.$$

$$\left. + \left(1 - \frac{S\,u}{\varepsilon_1^2}\right)\left(1 - \frac{S\,u}{\varepsilon_2^2}\right).S'v\right| - \left|\frac{1}{\varepsilon_1^2}\cdot\left(1 - \frac{S\,u}{\varepsilon_2^2}\right)\left(1 - \frac{S\,v}{\varepsilon_2^2}\right)\right|$$

$$\left.\left| \frac{1}{\varepsilon_2^2}\cdot\left(1 - \frac{S\,u}{\varepsilon_1^2}\right)\left(1 - \frac{S\,v}{\varepsilon_1^2}\right)\right|(S\,u\,.\,S'v - S\,v\,.\,S'u)\right\};$$

dann folgt durch Differentiation von 3) oder durch Multiplikation von § 10, 10) und 11)

$$5) \qquad S'(u\,u) = S'(u)\,.\,R'\,.\,(S\,u).$$

Die Gleichungen 4) und 5) ergeben das Resultat:

Die ersten Differentialquotienten der Funktionen $S(u+v)$ und $S(nu)$ lassen sich rational darstellen durch Su, Sv und deren erste Differentialquotienten.

Um die Gleichungen in noch einfacherer Form zu erhalten, sollen wie in § 8, 1) und 6) der Parameter α und andere Argumente eingeführt werden. Wir setzen

6) $$w_1 = \frac{u}{\sqrt{(\varepsilon_1 \varepsilon_2)}}, \qquad w_2 = \frac{v}{\sqrt{\varepsilon_1 \varepsilon_2}},$$

und wenn Zweideutigkeit ausgeschlossen ist

$$w = \frac{u}{\sqrt{\varepsilon_1 \varepsilon_2}};$$

dann ist nach § 8, 10) und 11)

$$S(w) = \frac{S(u)}{\varepsilon_1 \varepsilon_1}, \qquad S'(w) = \frac{S'(u)}{\sqrt{\varepsilon_1 \varepsilon_2}},$$

und die Gleichungen 2), 3), 4) und 5) lauten

$2^a)$ $$S(w_1 \mid w_2) \quad \frac{(S w_1 . S' w_2 + S w_2 . S' w_1)^2}{4 . S w_1 . S w_2 (1 \quad S w_1 . S w_2)^2}$$

$3^a)$ $$S(n w) = R(S w)$$

$4^a)$ $$S'(w_1 \mid w_2) \quad \frac{1}{(1 \quad S w_1 . S w_2)^3} \Big\{ (1 \mid S w_1 . S w_2)$$
$$[(1 \quad \alpha S w_1) . S' w_2 \mid (1 \quad \alpha S w_2) S' w_1]$$
$$- (\alpha - 2 S w_1 \; - 2 S w_2 + \alpha S w_1 . S w_2) (S w_1 . S' w_2 + S w_2 . S' w_1) \Big\}$$

$5^a)$ $$S'(n w) = S'(w) . R'(S w).$$

Daraus schliessen wir, dass sich sowohl das Additionstheorem der Funktionen $S(w)$ und $S'(w)$ als auch das Multiplikationstheorem durch rationale Funktionen von $S(w)$ und $S'(w)$ darstellen lassen, deren Koeffizienten neben ganzen rationalen Zahlen nur noch den Parameter α enthalten.

Wie im vorletzten Paragraphen soll auch hier die Ausrechnung für die einfachsten Werte erfolgen. Da die Rechnung weitläufig

ist, kann ich nur die Resultate angeben. Sie sind gefunden aus der Tabelle § 10. und mit Vorteil wurde dabei die aus § 9, 8) fliessende Gleichung:

$$6) \qquad S(w_1 + w_2) \cdot S(w_1 - w_2) \quad \frac{(S w_1 - S w_2)^2}{(1 - S w_1 \cdot S w_2)^2}$$

benützt.

Setzen wir noch zur Abkürzung $S(w) = S$, so ergibt sich folgende Tabelle:

$$\frac{S(w)}{S} \quad 1$$

$$7) \quad \frac{S(2w)}{2^2 S} \quad \frac{1 - a S + S^2}{1 - 2 S^2 + S^4}$$

$$8) \quad \frac{S(3w)}{S} \quad \frac{(3 - 4 a S + 6 S^2 - S^4)^2}{(1 - 6 S^2 + 4 a S^3 - 3 S^4)^2}$$

$$9 - 24 a S + (16 a^2 + 36) \cdot S^2 - 48 a S^3 + 30 S^4 +$$
$$9 S^8 - 24 a S^7 + (16 a^2 + 36) \cdot S^6 - 48 a S^5 + 30 S^4 +$$

$$+ 8 a S^5 - 12 S^6 + S^8$$
$$+ 8 a S^3 - 12 S^2 + 1$$

$$9) \quad \frac{S(4w)}{4^2 S} \quad \frac{Z_4}{N_4}$$

$$Z_4 \quad (1 - a S + S^2)(1 - S^2)^2 \{1 - 2 a S + 6 S^2 - 2 a S^3 + S^4\}^2$$

$$\{1 - 5 a S + (8 a^2 + 11) \cdot S^2 - (4 a^3 + 34 a) \cdot S^3 + (24 a^2 +$$
$$S^{14} - 5 a S^{13} + (8 a^2 + 11) \cdot S^{12} - (4 a^3 + 34 a) \cdot S^{11} + (24 a^2 +$$
$$+ 25) \cdot S^4 - 11 a S^5 - (32 a^2 + 37) \cdot S^6$$
$$+ (8 a^3 + 100 a) \cdot S^7$$
$$+ 25) \cdot S^{10} - 11 a S^9 - (32 a^2 + 37) \cdot S^8$$

$$N_4 = \{1 - 40 S^2 + 64 a S^3 - (32 a^2 - 348) \cdot S^4 - 1216 S^5 +$$
$$S^{16} - 40 S^{14} + 64 a S^{13} - (32 a^2 - 348) \cdot S^{12} - 1216 S^{11} +$$
$$+ (1664 a^2 + 1000) \cdot S^6 - (1024 a^3 + 2944 a) \cdot S^7$$
$$+ (256 a^4 + 2880 a^2 + 1478) \cdot S^8$$
$$+ (1664 a^2 + 1000) \cdot S^{10} - (1024 a^3 + 2944 a) \cdot S^9$$

10) $$\frac{S(5w)}{S} = \frac{Z_5}{N_5}$$

$$Z_5 = [5 - 20\alpha S + (16\alpha^2 + 62) \cdot S^2 - 80\alpha S^3 - 105 S^4 +$$
$$+ 360\alpha S^5 - (240\alpha^2 + 300) \cdot S^6 + (64\alpha^3 + 368\alpha) \cdot S^7$$
$$- (160\alpha^2 + 125) \cdot S^8 + 140\alpha S^9 - 50 S^{10} + S^{12}]^2$$

$$N_5 = [5 S^{12} - 20\alpha S^{11} + (16\alpha^2 + 62) \cdot S^{10} - 80\alpha S^9 - 105 S^8 +$$
$$+ 360\alpha S^7 - (240\alpha^2 + 300) \cdot S^6 + (64\alpha^3 + 368\alpha) \cdot S^5$$
$$- (160\alpha^2 + 125) \cdot S^4 + 140\alpha S^3 - 50 S^2 + 1]^2.$$

Setzt man entsprechend wie in § 10, 29) für ungerade n:

$$\frac{S(nw)}{S(w)} = \frac{P(Sw)}{Q(Sw)}$$

oder

11) $$\frac{S(w)}{x} = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

und wendet die dort unter a) bis f) gefundenen Resultate an, so ergeben sich wichtige Eigenschaften der Koeffizienten von $P(x)$ und $Q(x)$. Aus der Reihenentwicklung § 8, 12) und der Darstellung der Koeffizienten von $P(x)$ durch die symmetrischen Funktionen der Wurzeln, wenn letztere nach § 19, 4) gebildet werden, lässt sich ferner auf die Form dieser Koeffizienten schliessen.[1])

Wir finden

1.⁰ $P(x)$ hat als konstantes Glied n^2 und als höchste Potenz x^{n^2-1}.

2.⁰ Stellt man $P(x)$ in der Form

12) $$P(x) = P_1 + P_2 \cdot x + P_3 \cdot x^2 + \ldots + P_{n^2} \cdot x^{n^2-1}$$

dar, so sind $P_1, P_2, \ldots$ ganze ganzzahlige Funktionen von α, speziell

13) $$P_1 = n^2, \qquad P_{n^2} = 1.$$

[1]) Der ausführliche Beweis, dass die Koeffizienten von $P(x)$ und $Q(x)$ ganze ganzzahlige Funktionen von einem einzigen Parameter sind, ist Weber III. S. 578 und 579 für eine entsprechende Funktion erbracht. Daher ist hier eine weitere Darlegung nicht nötig.

Ferner kann man aus der Tabelle ersehen oder findet analog § 10, 39)

14) $$x^{n^2-1} \cdot P\left(\frac{1}{x}\right) \quad Q(x).$$

Es wäre auch möglich die Berechnung der P_1, P_2, ... ähnlich § 11 mit Hilfe der Potenzreihe § 8, 12) durchzuführen.

Dann können leicht Rekursionsformeln zur sukzessiven Berechnung von P und Q abgeleitet werden, wie sie H. Weber für sn, cn, dn und p angibt[1]).

§ 13.

Darstellung des Multiplikationstheorems durch die Nullstellen der Funktion $S(nw) - R(S)$.

Der Punkt nw ist ein Punkt der w-Ebene [Fig. 11], und wir könnten ihn daher wie jeden andern Punkt derselben Ebene einfach mit w bezeichnen, wollen aber zur nachherigen Unterscheidung $n\overline{w}$ schreiben. Verändern wir einen Punkt der w-Ebene um ganze Vielfache der Perioden ω_{I} und ω_{III}, so nimmt für diese neuen Punkte die S-Funktion wieder denselben Wert an. Die Funktion $S(n\overline{w}) = S(nw)$ hat somit dieselben Perioden wie $S(w)$, oder die Perioden der Funktion $S(nw)$ sind ω_{I} und ω_{III}[2]).

Daher darf allgemein geschrieben werden

1) $$S(nw) = S(nw + \nu\,\omega_{\mathrm{I}} + \nu'\,\omega_{\mathrm{III}}),$$

worin ν und ν' ganze positive oder negative Zahlen bedeuten. Entsprechend muss dann, wenn w für nw geschrieben wird,

2) $$S(w^*) = S\left(w + \frac{\nu\,\omega_{\mathrm{I}}}{n} + \frac{\nu'\,\omega_{\mathrm{III}}}{n}\right)$$

an Stelle von $S(w)$ gesetzt werden.

Durchlaufen ν und ν' unabhängig von einander die Reihe der ganzen reellen Zahlen, so ergibt sich für $S(nw)$ immer derselbe Wert, für $S(w^*)$ dagegen in jedem Periodenparallelogramm n^2 Werte. Die n^2 Werte eines Parallelogramms sind zu den n^2 eines jeden andern einzeln kongruent, und berücksichtigen wir nur diejenigen im Fundamentalperiodenparallelogramm, so haben wir damit schon

[1]) Weber III. § 57 (13), (14) und 58 (15), (16).

[2]) Die grundlegende Bedeutung dieser Eigenschaft ersieht man aus „Weber III“ S. 413.

alle inkongruenten Werte. Diese werden erhalten, wenn ν und ν' unabhängig von einander ein ganzes Restsystem modulo n durchlaufen.

Den Zusammenhang zwischen $S(n\,w)$ und $S(w)$ gibt die Multiplikationsgleichung § 12, 3[a])

3) $$S(n\,w) - R(S\,w) = 0,$$

deren Grad n^2 ist. Betrachten wir in dieser Gleichung $S(n\,w)$ als gegeben und $S(w) = x$ als gesucht, so müssen sich für die Wurzeln n^2 verschiedene Werte ergeben. Dies können aber nur die n^2 Grössen 2)

4) $$S(w^*) = x_{\nu,\,\nu'} = S\left(w + \frac{\nu\,\omega_{\mathrm{I}}}{n} + \frac{\nu'\,\omega_{\mathrm{III}}}{n}\right)_{[\nu,\,\nu'\ mod\ n]}$$

sein.

Bleiben wir bei ungeradem n und schreiben die Multiplikationsgleichung in der Form § 12, 11)

5) $$S(n\,w)\,.\,Q(S) - S\,.\,P(S) = 0$$

so erkennen wir aus § 10, b), dass Q immer 1 als konstantes Glied hat. Daher ist $S(n\,w)$ das konstante Glied der Gleichung

5[a]) $$S(n\,w)\,.\,Q(x) - x\,.\,P(x) = 0,$$

und da 4) ihre Wurzeln sind, ergibt sich

6) $$S(n\,w) = \prod_{\nu,\,\nu'} S\left(w + \frac{\nu\,\omega_{\mathrm{I}}}{n} + \frac{\nu'}{n}\frac{\omega_{\mathrm{III}}}{n}\right)^{1});$$

d. h. $S(n\,w)$ ist dargestellt als Produkt der Wurzeln der Multiplikationsgleichung 5).

Nimmt man die Wurzel x nach links in den Nenner, so erhält man nach zweimaliger Differentiation § 8. 11), und wenn dann w gleich einer Periode gesetzt wird

7) $$n^2 \prod_{\nu,\,\nu'}{}' S\left(\frac{\nu\,\omega_{\mathrm{I}}}{n} + \frac{\nu'\,\omega_{\mathrm{III}}}{n}\right)^{2}).$$

Damit haben wir schon ein weiteres Gebiet berührt. Wir haben in diesem Abschnitt $S(n\,w)$ als Funktion von $S(w)$ dargestellt und sind jetzt im letzten Paragraphen zum umgekehrten Problem, der Darstellung von $S(w)$ als Funktion von $S(n\,w)$ geführt worden.

Diese Aufgabe wird im folgenden Abschnitt unter dem Namen Teilung behandelt.

[1]) und [2]) Vergleiche die analogen Resultate § 10, 33) und 33[a]).

Zweiter Abschnitt.

Die Teilung.

§ 14.

Allgemeines.

Die der Multiplikation entgegengesetzte Aufgabe ist die Teilung. Dabei ist die Funktion des ganzen Arguments gegeben und die Funktion des n-ten Teils des Arguments gesucht; bei der S-Funktion ist $S(w)$ als bekannt vorausgesetzt und $S\left(\frac{w}{n}\right)$ gesucht. Die Bestimmung von $S\left(\frac{w}{n}\right)$ führt auf die algebraische Auflösung der Teilungsgleichung, die erhalten wird, wenn man im Multiplikationstheorem § 12, 3) oder § 13, 3) w an die Stelle von nw setzt:

$$1) \qquad Q\left(S\frac{w}{n}\right) \cdot S(w) \quad S\left(\frac{w}{n}\right) \cdot P\left(S\frac{w}{n}\right) = 0.$$

Wird noch zur Abkürzung $S\left(\frac{w}{n}\right) = x$ gesetzt, so lautet die allgemeine Teilungsgleichung

$$2) \qquad Q(x) \,.\, S(w) - x \,.\, P(x) = 0.$$

Setzen wir statt w eine der Perioden ω_{I}, ω_{II}, ω_{III}, oder deren Vielfache, so wird $S(w) = 0$, und 2) geht über in die spezielle Teilungsgleichung oder die Periodenteilungsgleichung

$$3) \qquad x \,.\, P(x) = 0.$$

Die Lösung der Gleichung 2) heisst die allgemeine Teilung oder das allgemeine Teilungsproblem. Die Lösung der Gleichung 3) die Teilung der Perioden oder das spezielle Teilungsproblem.

Die Betrachtung dieser Teilungsgleichungen und die Verwendung der Galois'schen Theorie und Abel'schen Prinzipien zu ihrer Auflösung wird unsere nächste Aufgabe sein.

Bevor wir jedoch auf die Lösung für ein beliebiges n eintreten, gehen wir über zum einfachsten Fall, der Teilung durch zwei.

§ 15.

Die Teilung durch 2.

Wir setzen in der Gleichung § 12, 7) w an die Stelle von $2w$ und $S\left(\frac{w}{2}\right) = x$; dann lautet die allgemeine Teilungsgleichung für $n = 2$:

1) $$(1 - 2x^2 + x^4)\,S(w) = 4x(1 - ax + x^2) = 0.$$

Bei ihrer Auflösung unterscheiden wir das spezielle und das allgemeine Teilungsproblem, wobei wir in beiden Fällen 4 Wurzeln erhalten müssen.

a) Die spezielle Teilung:

Dabei ist w eine beliebige Periode. Nehmen wir an, ν und ν' seien ganze positive oder negative Zahlen, so können wir alle ganzen Perioden darstellen in der Form

$$0 \qquad \nu\,\omega_I \qquad \nu\,\omega_I + \nu'\,\omega_{III} \qquad \nu'\,\omega_{III}$$

und erhalten implizit als Wurzeln der Teilung durch 2

$$S(0) \qquad S\left(\frac{\nu\,\omega_I}{2}\right) \qquad S\left(\frac{\nu\,\omega_I + \nu'\,\omega_{III}}{2}\right) \qquad S\left(\frac{\nu'\,\omega_{III}}{2}\right).$$

Sämtlichen Argumenten $\frac{\nu\,\omega_I + \nu'\,\omega_{III}}{2}$ entsprechen nur 4 verschiedene Funktionswerte. Alle andern sind um ganze Perioden von einem dieser vier Werte verschieden, also mit denselben übereinstimmend. Wir wählen diejenigen im fundamentalen Periodenparallelogramm aus, [Vergleiche Fig. 11]

2) $$S(0) \qquad S\left(\frac{\omega_I}{2}\right) \qquad S\left(\frac{\omega_{II}}{2}\right) \qquad S\left(\frac{\omega_{III}}{2}\right).$$

für die uns der Paragraph 8 die expliziten Werte liefert

3) $$0 \qquad e_I \qquad e_{II} \qquad \infty.$$

Die 4 impliziten Werte lassen sich zusammenfassen in dem Ausdruck

4) $$S\left(\frac{\nu\,\omega_I + \nu'\,\omega_{III}}{2}\right).$$

worin ν und ν' ein ganzes Restsystem nach dem Modul 2 durchlaufen.

Die 4 expliziten Werte müssen die Wurzeln der Periodenteilungsgleichung sein, die nach 1) und § 14, 3) lautet

5) $$x \,.\, (1 \quad \alpha\, x + x^2) \quad x \,.\, (\varepsilon_I - x)\,(\varepsilon_{II} - x) \quad 0,$$

wobei zur Umformung die Beziehungen § 8, 15) und 16)

6) $$\varepsilon_I + \varepsilon_{II} \quad \alpha \text{ und } \varepsilon_I \,.\, \varepsilon_{II} \quad 1$$

verwendet werden. Die Gleichung 5) wird befriedigt durch die Wurzeln

$$x \quad 0, \quad \varepsilon_I, \quad \varepsilon_{II}.$$

Auch der 4. Wert 3) ist eine Wurzel, was sich ergibt, wenn man in der allgemeinen Teilungsgleichung 1) $w \quad \omega_{III}$ setzt. Dann wird sie erfüllt durch

$$x \quad \infty .$$

Damit ist das spezielle Teilungsproblem gelöst, und es ergeben sich die 4 Wurzeln

7) $$S(0) \quad 0 \qquad S\left(\frac{\omega_{II}}{2}\right) \quad \varepsilon_{II}$$
$$S\left(\frac{\omega_I}{2}\right) \quad \varepsilon_I \qquad S\left(\frac{\omega_{III}}{2}\right) \quad \infty .$$

b) Die allgemeine Teilung:

Dabei ist w keiner Periode kongruent, kann also jeden beliebigen Wert annehmen und darf ausserdem noch um beliebige Perioden verändert werden, ohne dass sich die Funktion S ändert:

$$w \qquad w + \nu\,\omega_I \qquad w + \nu\,\omega_I + \nu'\,\omega_{III} \qquad w + \nu'\,\omega_{III}.$$

Die Teilung durch 2 gibt die Argumente

8) $$\frac{w}{2} \qquad \frac{w + \nu\,\omega_I}{2} \qquad \frac{w + \nu\,\omega_I + \nu'\,\omega_{III}}{2} \qquad \frac{w + \nu'\,\omega_{III}}{2},$$

denen auch nur 4 verschiedene Funktionswerte entsprechen, die wir wieder im Fundamentalparallelogramm wählen:

9) $$S\left(\frac{w}{2}\right) \quad S\left(\frac{w + \nu\,\omega_I}{2}\right) \quad S\left(\frac{w + \nu\,\omega_I + \nu'\,\omega_{III}}{2}\right) \quad S\left(\frac{w + \nu'\,\omega_{III}}{2}\right).$$

Wir können diese 4 Funktionswerte durch folgenden Ausdruck darstellen:

10) $$\mathfrak{S}\left(\frac{w}{2} + \frac{\nu\,\omega_{\mathrm{I}} + \nu'\,\omega_{\mathrm{III}}}{2}\right),$$

worin ν und ν' ein ganzes Restsystem nach dem Modul 2 durchlaufen.

Die expliziten Wurzeln ergeben sich durch die Auflösung der allgemeinen Teilungsgleichung 1), die als Gleichung 4. Grades immer lösbar ist. Zur Lösung kenne ich 2 Wege, entweder werden die Wurzeln nach den gewöhnlichen Auflösungsregeln der Gleichungen 4. Grades bestimmt, oder man greift zurück auf die $\mathfrak{S}$-Funktion und betrachtet neben $\mathfrak{S}$ noch die beiden Funktionen $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{D}$[1]). Dann bekommt man statt der Lösung einer Gleichung 4. Grades die Lösung von zwei simultanen quadratischen Gleichungen [§ 10, 13) und 14)]. Ist dann nur eine der Wurzeln gefunden, so können die 3 andern, deren Argumente um halbe Perioden verschieden sind nach den Gleichungen § 8, 19) oder § 12, 2) gerechnet werden.

Hier ist gestützt auf die $\mathfrak{S}$-Funktion in Abelscher Weise eine Wurzel berechnet worden, und daraus werden die andern bestimmt.

Die Gleichung für die $\mathfrak{S}$-Funktion lautet § 10, 12)

$$\left(1 - \frac{\mathfrak{S}^4}{\varepsilon_1\,\varepsilon_2}\right)\cdot \mathfrak{S}\,2u = 2\,\mathfrak{S}\cdot\sqrt{\left(1 - \frac{\mathfrak{S}^2}{\varepsilon_1^{\,2}}\right)\left(1 - \frac{\mathfrak{S}^2}{\varepsilon_2^{\,2}}\right)}\quad 0$$

und geht quadriert, u an Stelle von $2u$ und $\mathfrak{S}^2\left(\frac{u}{2}\right) = y$ gesetzt, über in

11) $$\left(1 - \frac{y^2}{\varepsilon_1\,\varepsilon_2}\right)^2\cdot \mathfrak{S}^2 u - 4y\cdot\left(1 - \frac{y}{\varepsilon_1^{\,2}}\right)\left(1 - \frac{y}{\varepsilon_2^{\,2}}\right) = 0.$$

Von dieser Gleichung findet man mit Hilfe von § 10, 13) und 14) als Wurzel

12) $$y = \varepsilon_1^{\,2}\cdot\frac{1 - \sqrt{1 - \frac{\mathfrak{S}^2}{\varepsilon_1^{\,2}}}}{1 + \sqrt{1 - \frac{\mathfrak{S}^2}{\varepsilon_2^{\,2}}}} = \varepsilon_2^{\,2}\cdot\frac{1 - \sqrt{1 - \frac{\mathfrak{S}^2}{\varepsilon_2^{\,2}}}}{1 + \sqrt{1 - \frac{\mathfrak{S}^2}{\varepsilon_1^{\,2}}}}.$$

[1]) Aehnlich hat es Abel (Oeuvres complètes Bd. I. p. 292 ff.) für seine 3 Funktionen φ, f und F durchgeführt und Weber (III Bd. § 59) für die elliptischen Funktionen sn, cn und dn.

Schreibt man die Gleichung 11) für die S-Funktion, so geht sie in 1) über. Werden die Wurzelwerte 12) entsprechend umgeformt, so gehen sie über in die Wurzeln der Gleichung 1).

Auf diese Weise erhalten wir als erste Wurzel der Gleichung 1)

$$13) \qquad x = \varepsilon_I \cdot \frac{1 - \sqrt{1 - \varepsilon_{II} S}}{1 + \sqrt{1 - \varepsilon_I S}} - \varepsilon_{II} \cdot \frac{1 - \sqrt{1 - \varepsilon_I S}}{1 + \sqrt{1 - \varepsilon_{II} S}}.$$

Durch Bildung des Quotienten überzeugt man sich leicht, dass die beiden Werte 13) übereinstimmen.

Zur Probe können die Wurzeln 13) in die Gleichung 1) eingesetzt werden, wobei wir am einfachsten $x = \frac{r}{s}$ setzen, zuerst so rechnen, dann die Werte für r und s einsetzen und bedenken, dass $\alpha = \varepsilon_I + \varepsilon_{II}$ ist.

Nun ist zu entscheiden, welchem der 4 Werte 9) die Wurzel 13) entspricht. Dazu setzen wir $w = 0$ und erhalten

$$x = 0.$$

was nach 7) der Wurzel $S(0)$ der Periodenteilungsgleichung entspricht. Also müssen wir in 13) dem x den impliziten Wert $S\left(\frac{w}{2}\right)$ zuschreiben und erhalten als erste Wurzel der Gleichung 1)

$$14) \quad x_{00} = S\left(\frac{w}{2}\right) = \varepsilon_I \cdot \frac{1 - \sqrt{1 - \varepsilon_{II} S}}{1 + \sqrt{1 - \varepsilon_I S}} - \varepsilon_{II} \cdot \frac{1 - \sqrt{1 - \varepsilon_I S}}{1 + \sqrt{1 - \varepsilon_{II} S}}.$$

Daraus lassen sich die drei andern Wurzeln 9) durch Vermehrung des Argumentes $\frac{w}{2}$ um halbe Perioden leicht bestimmen,

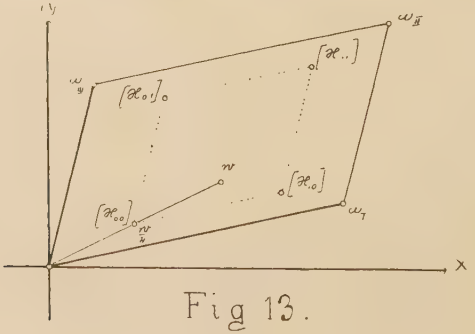

Fig 13.

indem wir die Gleichungen § 8, 19) verwenden. Die Rechnung sei nur für die Vermehrung um $\frac{\omega_I}{2}$ durchgeführt.

Wir setzen in die erste Gleichung 19)

$$S\left(\frac{w}{2}\right) = x = \frac{r}{s}$$

und erhalten

$$S\left(\frac{w+\omega_I}{2}\right) = \varepsilon_{II} \cdot \frac{\varepsilon_I s - r}{\varepsilon_{II} s - r}.$$

Werden für r und s die Werte 14) eingeführt, und bedenkt man, dass $\varepsilon_I \varepsilon_{II} = 1$ ist, so ergibt sich direkt:

15) x_{10} $$S\left(\frac{w+\omega_I}{2}\right) = \frac{\sqrt{1-\varepsilon_I S} + \sqrt{1-\varepsilon_{II} S}}{\varepsilon_{II} \cdot [1+\sqrt{1-\varepsilon_I S}] - \varepsilon_I [1-\sqrt{1-\varepsilon_{II} S}]}$$

$$\frac{\varepsilon_I \cdot [1+\sqrt{1-\varepsilon_{II} S}]}{\sqrt{1-\varepsilon_{II} S} + \sqrt{1-\varepsilon_I S}} \quad \frac{\varepsilon_{II} \cdot [1-\sqrt{1-\varepsilon_I S}]}{\sqrt{1-\varepsilon_{II} S} + \sqrt{1-\varepsilon_I S}}$$

Wieder kann man sich durch Bildung des Quotienten von der Gleichheit beider Werte überzeugen.

Für $w = 0$ erhält man aus beiden Werten

$$S\left(\frac{\omega_I}{2}\right) \quad \varepsilon_I \quad \frac{1}{\varepsilon_{II}},$$

wie es nach 7) sein soll.

Analog ergeben die Gleichungen § 8, 19) die beiden andern Wurzeln:

x_{11} $$S\left(\frac{w+\omega_{II}}{2}\right) = \frac{\varepsilon_I \cdot [1+\sqrt{1-\varepsilon_I S}] \quad \varepsilon_{II} \cdot [1-\sqrt{1-\varepsilon_{II} S}]}{\sqrt{1-\varepsilon_I S} + \sqrt{1-\varepsilon_{II} S}}$$

16) $$= \frac{\sqrt{1-\varepsilon_I S} + \sqrt{1-\varepsilon_{II} S}}{\varepsilon_I \cdot [1+\sqrt{1-\varepsilon_{II} S}] - \varepsilon_{II} \cdot [1-\sqrt{1-\varepsilon_I S}]},$$

17) $x_{01} = S\left(\frac{w-\omega_{III}}{2}\right) = \varepsilon_{II} \cdot \frac{1+\sqrt{1-\varepsilon_I S}}{1-\sqrt{1-\varepsilon_{II} S}} = \varepsilon_I \cdot \frac{1+\sqrt{1-\varepsilon_{II} S}}{1-\sqrt{1-\varepsilon_I S}}.$

Ist w null oder gleich einer Periode, so ergeben sich wieder die zugehörigen Wurzeln 7).

Damit ist die allgemeine Teilung durch 2 durchgeführt und hat die vier Wurzeln 14), 15), 16) und 17) ergeben. Das Vorzeichen der auftretenden Quadratwurzeln ist bestimmt durch die eindeutige Definition von

$$S\left(\frac{w}{2} + \frac{\nu\,\omega_{\mathrm{I}} + \nu'\,\omega_{\mathrm{III}}}{2}\right)$$

durch die Sigmafunktionen.

Nachdem hiemit der einfachste Fall vollständig erledigt ist, gehen wir über zur Teilung durch Potenzen von 2.

§ 16.

Die Teilung durch Potenzen von 2.

Wie bei der Teilung durch 2 führt auch hier der Weg zur Auflösung der allgemeinen Teilungsgleichung über die Teilung der Perioden. Daher soll zuerst die Periodenteilung betrachtet werden und zwar nicht sofort für eine beliebige Potenz von 2, sondern vorerst nur die spezielle Teilung durch 4.

Das Periodenparallelogramm [Fig. 14] gibt uns einen Ueberblick

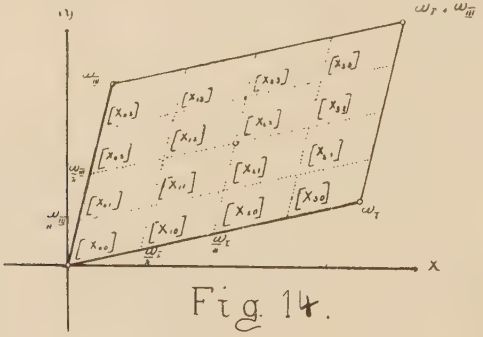

Fig. 14.

über die Wurzeln. Diese sind

1)
$$\begin{array}{cccc} X_{00}, & X_{10}, & X_{20}, & X_{30}, \\ X_{01}, & X_{11}, & X_{21}, & X_{31}, \\ X_{02}, & X_{12}, & X_{22}, & X_{32}, \\ X_{03}, & X_{13}, & X_{23}, & X_{33}. \end{array}$$

Davon haben wir schon 4 bei der speziellen Teilung durch 2 bestimmt § 14, 7) und zwar

2) $\quad x_{00} = 0, \qquad x_{20} = \varepsilon_I, \qquad x_{22} = \varepsilon_{II}, \qquad x_{02} = \infty .$

Dann erinnern wir uns, dass $S(w)$ als gerade Funktion von w der Gleichung

$$S(w) = S(-w)$$

genügt und als Perioden ω_I und ω_{III} hat; folglich ist:

3) $$S(w) = S(-w) = S(\omega_I - w) = S(\omega_{II} - w) = -S(\omega_{III} - w);$$

d. h. je zwei Punkten, die diametral zum Zentrum des Parallelogramms liegen und je zwei Punkten auf dem Rande, die gleich weit vom entsprechenden Randmittelpunkt entfernt sind, entsprechen dieselben Funktionswerte.

Vergleichen wir die Lage der Nullstellen in Figur 14, so ergibt sich, dass je 2 dieselben Funktionswerte haben.

$$x_{10} = x_{30}, \qquad x_{11} = x_{33}, \qquad x_{31} = x_{13}.$$

$$x_{01} = x_{03}, \qquad x_{21} = x_{23}, \qquad x_{32} = x_{12}.$$

Daraus ergibt sich, dass die spezielle Teilung durch 4 nicht mehr als 10 verschiedene Wurzeln liefern kann. Davon sind 4 durch die Gleichungen 2) bestimmt. Die weiteren 6 Werte liefern die Gleichungen des letzten Paragraphen, und zwar ist

nach § 15, 14)

4) $$x_{10} = x_{30} = -\frac{\varepsilon_I}{1 + \sqrt{1 - \varepsilon_I^2}} = \varepsilon_{II} \cdot (1 - \sqrt{1 - \varepsilon_I^2}),$$

5) $$x_{11} = x_{33} = \varepsilon_I \,(1 - \sqrt{1 - \varepsilon_{II}^2}) = \frac{\varepsilon_{II}}{1 + \sqrt{1 - \varepsilon_{II}^2}}.$$

6) $$x_{01} = x_{03} = \varepsilon_I \cdot \frac{\frac{1}{\infty} - \sqrt{\frac{1}{\infty} - \varepsilon_{II}}}{\frac{1}{\infty} + \sqrt{\frac{1}{\infty} - \varepsilon_I}} \cdot \varepsilon_{II} \cdot \frac{\frac{1}{\infty} - \sqrt{\frac{1}{\infty} - \varepsilon_I}}{\frac{1}{\infty} + \sqrt{\frac{1}{\infty} - \varepsilon_{II}}} \cdot \cdot \sqrt{\varepsilon_I \, \varepsilon_{II}} = -1.$$

nach § 15, 17)

7) $x_{12} = x_{23} = \varepsilon_{II} \cdot (1 + \sqrt{1 - \varepsilon_I^2}) = \dfrac{\varepsilon_I}{1 - \sqrt{1 - \varepsilon_I^2}}$,

8) $x_{13} = x_{31} = \dfrac{\varepsilon_{II}}{1 - \sqrt{1 - \varepsilon_{II}^2}} = \varepsilon_I (1 + \sqrt{1 - \varepsilon_{II}^2})$,

nach § 15, 15)

9) $x_{21} = x_{32} = \dfrac{\sqrt{-\varepsilon_I} + \sqrt{-\varepsilon_{II}}}{\varepsilon_{II}\sqrt{-\varepsilon_I} + \sqrt{-\varepsilon_{II}}} = 1.$

Die Grössen 1) sind die Wurzeln der Periodenteilungsgleichung für $n = 4$. Daher müssen sich durch Auflösung derselben ebenfalls die Werte 2) und 4) bis 9) ergeben.

Setzen wir in § 12, 9) w an die Stelle von $4w$ und dann w gleich einer Periode, so lautet diese Periodenteilungsgleichung:

10) $x \cdot (1 - \alpha x + x^2) \cdot (1 - x^2)^2 \cdot (1 - 2\alpha x + 6x^2 - 2\alpha x^3 + x^4)^2 = 0.$

Den beiden ersten Faktoren entsprechen nach § 15, 5) die 4 Wurzeln 2). Der 3. Faktor wird erfüllt durch die beiden Doppelwurzeln 6) und 9), und der letzte Faktor hat als Doppelwurzeln die Werte 4), 5), 7) und 8), was durch Einsetzen leicht geprüft werden kann.

Aus den gefundenen 16 Wurzeln werden analog die 64 Wurzeln der speziellen Teilung durch 8 ermittelt, und so fortfahrend lässt sich die spezielle Teilung durch jede Potenz von 2 durch wiederholtes Ausziehen von Quadratwurzeln lösen.

Nun wenden wir uns zur allgemeinen Teilung durch Potenzen von 2; n sei also eine Potenz von der Form $n = 2^m$.

Dabei sind die n^2 Wurzeln der Gleichung

11) $$S(w) \cdot Q(x) - x \cdot P(x) = 0$$

zu bestimmen. Sie haben die Form

12) $$S\left(\frac{w}{n} + \frac{\nu\,\omega_I + \nu'\,\omega_{III}}{n}\right),$$

worin ν und ν' modulo n genommen sind.

Durch Anwendung von § 15, 14), 15), 16), 17) ergeben sich die 4 Wurzeln

$$S_2\left(\frac{w}{2} + \frac{\nu\,\omega_I + \nu'\,\omega_{III}}{2}\right).$$

Wenden wir auf alle 4 Wurzeln wieder § 15, 14), 15), 16), 17) an, so ergibt jede Wurzel S_2 vier neue Wurzeln und zwar

$$S_4\left(\frac{w}{4}+\frac{\nu\,\omega_{\mathrm{I}}+\nu'\,\omega_{\mathrm{III}}}{4}\right).$$

Fahren wir so fort, so erkennen wir, dass auch die allgemeine Teilung durch Potenzen von 2 durch Ausziehen von Quadratwurzeln gelöst werden kann.

Haben wir ein beliebiges gerades n, so kann die Teilung so weit durchgeführt werden, als n Primfaktoren 2 besitzt. Dadurch wird für jeden Faktor 2 der Grad der Gleichung auf den 4. Teil erniedrigt. So kann fortgefahren werden, bis die Teilung durch ein ungerades n übrig bleibt, und also die Teilung durch gerade n gelöst ist bis auf die Teilung durch den grössten ungeraden Faktor von n.

Dieselbe Ueberlegung führt uns zum Ergebnis, dass die Teilung durch zusammengesetzte n gelöst werden kann durch die sukzessive Teilung durch die in n enthaltenen Primzahlen.

Im Folgenden haben wir also nur noch die Teilung durch Primzahlen zu betrachten.

§ 17.

Die Teilung durch ungerade Primzahlen.

Wir betrachten wieder zuerst die **Teilung der Perioden.** Indem wir für die Perioden den allgemeinsten Ausdruck

$$\nu\,\omega_{\mathrm{I}}+\nu'\,w_{\mathrm{III}}$$

setzen, worin ν, ν' beliebige ganze positive oder negative Zahlen bedeuten, ergibt sich für die spezielle Teilung das Argument

$$\frac{\nu\,\omega_{\mathrm{I}}+\nu'\,\omega_{\mathrm{III}}}{n}$$

und als allgemeinste Form der Wurzeln der Periodenteilungsgleichung

$$1)\qquad S\left(\frac{\nu\,\omega_{\mathrm{I}}+\nu'\,\omega_{\mathrm{III}}}{n}\right)=x_{\nu,\nu'}.$$

Von diesen Wurzeln liegen je n^2 in jedem Periodenparallelogramm. Wegen der Periodizität der Funktion S stimmen aber die

n^2 Wurzeln eines Parallelogramms mit den n^2 entsprechenden jedes andern einzeln überein, und es bleiben nur n^2 inkongruente Werte. Diese wählen wir im Fundamentalperiodenparallelogramm. Sie sind ausgedrückt durch 1), wenn wir ν und ν' die Beschränkung auferlegen, dass sie je unabhängig von einander ein ganzes Restsystem nach dem Modul n durchlaufen.

Die Grössen $x_{\nu,\nu'}$ sind als Wurzeln der Gleichung § 14, 3)

2) $$x \,.\, P(x) = 0$$

zu bestimmen.

Wir fragen zunächst, ob gleiche Wurzeln vorkommen und können die gleiche Ueberlegung wie in 3) des letzten Paragraphen machen; denn betrachten wir die Figur 15, so ergibt sich, dass mit

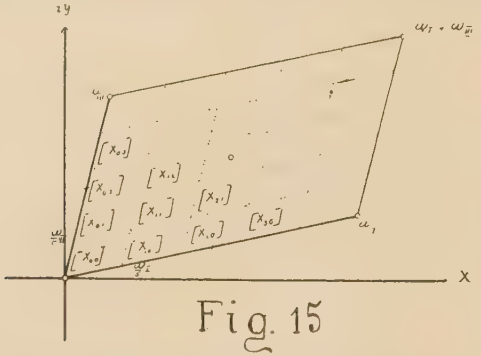

Fig. 15

Ausnahme des Nullpunktes je 2 Nullstellen gleiche Funktionswerte haben. Es bestehen $\frac{n^2-1}{2}$ Paare gleicher Wurzeln, und sind die gleichen Wurzeln fortgeschafft, so bleibt noch eine Gleichung vom Grad $\frac{n^2-1}{2}$.

Dasselbe ergibt sich für die niedrigsten Werte rein algebraisch aus der Tabelle § 12; z. B. lautet für $n = 3$ die Periodenteilungsgleichung

2*) $$x^4 - 6x^2 + 4\alpha x - 3 = 0.$$

Zur weitern Betrachtung haben wir zuerst festzulegen, welche Grössen wir als bekannt voraussetzen wollen. Diese nehmen wir in den Rationalitätsbereich auf. Für unsere Gleichung seien es rationale Zahlen und rationale Funktionen von ε_1 und ε_2 mit rationalzahligen Koeffizienten.

Nach dieser Festsetzung gehen wir zum Galois'schen Körper der Gleichung über; darin lässt sich jede Wurzel durch beliebige andere Wurzeln rational ausdrücken, und wenn in ihm eine rationale Gleichung zwischen den Wurzeln besteht, so bleibt sie rational, wenn man die Wurzeln unter einander vertauscht.[1])

Wir denken uns jetzt die Wurzeln $x_{\nu,\nu'}$ gefunden. Wollen wir dann eine derselben durch eine andere darstellen, so steht uns die Multiplikations- und Additionsgleichung zur Verfügung, § 12, 2ª), 3ª). Die erstere wird, wie § 18 zeigt, für je Systeme von Wurzeln angewendet. Durch die letztere kann jede Wurzel aus zwei beliebigen andern gebildet werden:

$$3) \qquad x_{\nu+\mu,\,\nu'+\mu'} = \frac{(x_{\nu,\nu'} \cdot x'_{\mu,\mu'} + x_{\mu,\mu'} \cdot x'_{\nu,\nu'})^2}{4\, x_{\nu,\nu'} \cdot x_{\mu,\mu'} (1 - x_{\nu,\nu'} \cdot x_{\mu,\mu'})^2}.$$

Neben den Grössen x, x' enthält diese Gleichung nur rationale Zahlen.

Nach unserer Annahme sind $x_{\nu,\nu'}$ und $x_{\mu,\mu'}$ bekannt, nicht aber $x'_{\nu,\nu'}$ und $x'_{\mu,\mu'}$. Zur Bestimmung von x' erhalten wir aus § 12, 5ª) für beliebige w

$$4) \qquad S'(w) = x' \cdot R'(x).$$

Setzen wir aber w gleich einer Periode, so geht diese Gleichung über in

$$0 = 0.$$

Differentieren wir, so wird nach § 8, 11ª)

$$S''(w) = 2\,(1 - 2\alpha x + 3x^2) \cdot R'(x) + x'^2 \cdot R''(x).$$

Wird jetzt an Stelle von w eine Periode gesetzt, so wird

$$5) \qquad 2 = 2\,(1 - 2\alpha x + 3x^2) \cdot R'(x) + x'^2 \cdot R''(x),$$

worin R' und R'' rationale Funktionen von x sind. Daraus erhalten wir x' irrational, und setzen wir es in 3) ein, so bekommen wir eine irrationale Funktion in die Relationen zwischen den Wurzeln hinein.

Der Galois'sche Körper der Gleichung 2) würde daher auch **irrationale** Funktionen umfassen.

[1]) Encykl .der math. Wissenschaften I. B, 3c, d oder Weber I. Galois'sche Theorie.

Die Periodenteilungsgleichung der Funktion S wäre somit nur in einem höhern Körper lösbar.

Wollen wir die Periodenteilung im Körper der rationalen Zahlen und rationalen Funktionen der ε durchführen, so müssen wir wieder zur Funktion $\mathfrak{S}$ zurückkehren.

Setzt man $\mathfrak{S}\left(\frac{u}{n}\right) = \mathfrak{x}$ und u gleich einer Periode $2\nu\omega_1 + 2\nu'\omega_3$, so ist nach § 10, 29) die Gleichung

6) $$\mathfrak{x} \cdot p(\mathfrak{x}^2) = 0$$

zu lösen. Nach § 10, 11) erhalten wir ferner

7) $$1 = \mathfrak{x}' \cdot R'(\mathfrak{x}^2).$$

Dabei sind p und R' rationale Funktionen von $\mathfrak{x}^2$, die als Koeffizienten rationale Zahlen und rationale Funktionen von ε_1^2 und ε_2^2 enthalten.

Nun denken wir uns die Wurzeln $\mathfrak{x}_{2\nu, 2\nu'}$ gefunden; dann ergibt die Gleichung 7) zu jedem $\mathfrak{x}$ durch rationale Rechnung den 1. Differentialquotienten $\mathfrak{x}'$ und § 9, 8) lässt jede Wurzel $\mathfrak{x}$ **rational** durch 2 beliebige andere Wurzeln ausdrücken.

8) $$\mathfrak{x}_{2\nu+2\mu,\, 2\nu'+2\mu'} = R(\mathfrak{x}_{2\nu,\, 2\nu'},\ \mathfrak{x}_{2\mu,\, 2\mu'}).$$

Ist dies bei einer Gleichung der Fall, so kann sie nach Galois durch Wurzelgrössen gelöst werden. [1])

Speziell findet man, dass nach dem Multiplikationstheorem § 10, 10) jede Randwurzel durch $\mathfrak{x}_{2,0}$ resp. $\mathfrak{x}_{0,2}$ allein dargestellt werden kann, also

$$\mathfrak{x}_{2\nu,\,0} = f_{2\nu}(\mathfrak{x}_{2,0}), \quad \mathfrak{x}_{0,\,2\nu'} = f_{2\nu'}(\mathfrak{x}_{0,2});$$

dann ist nach dem Additionstheorem § 9, 8)

9) $$\mathfrak{x}_{2\nu,\,2\nu'} \quad \Phi_{2\nu,\,2\nu'}(\mathfrak{x}_{2,0},\ \mathfrak{x}_{0,2}),$$

und wir finden, dass jede Wurzel rational aus den beiden Grundwerten $\mathfrak{S}\left(\frac{2\omega_1}{n}\right)$ und $\mathfrak{S}\left(\frac{2\omega_3}{n}\right)$ hergeleitet werden kann.

[1]) Galois: Abhandlung über die Auflösbarkeit der Gleichungen durch Wurzelgrössen 1831. Lehrsatz VIII.

Darin, dass wir oben $2\,\omega_1$ und $2\,\omega_3$ als Perioden von $\mathfrak{S}$ genommen haben, scheint ein Widerspruch mit den im ersten Teil gefundenen Resultaten zu liegen. Dieser erklärt sich dadurch, dass in unserer Rechnung 7) nach § 7 nur im Periodenparallelogramm $[2\,\omega_1,\ 2\,\omega_3]$ gilt.

Von den erhaltenen n^2 Wurzeln ξ ist eine 0, und von den andern sind je 2 entgegengesetzt gleich.

Bilden wir daraus durch Quadrierung und Teilung durch $\varepsilon_1\,\varepsilon_2$ die Grössen $S\left(\frac{\nu\,\omega_I + \nu'\,\omega_{III}}{n}\right)$, so ergeben sich die gesuchten $\frac{n^2}{2} - \frac{1}{2}$ verschiedenen Wurzeln der Gleichung

$$P(x) = 0.$$

Zugleich finden wir die 1. Differentialquotienten $S'\left(\frac{\nu\,\omega_I + \nu'\,\omega_{III}}{n}\right)$ durch Bildung der Produkte $2\,\frac{\mathfrak{S}\,\mathfrak{S}'}{\varepsilon_1\,\varepsilon_2}$.

Die Zuordnung zu den verschiedenen Punkten erfolgt wie am Schluss von § 20. Damit ist gezeigt, dass die Lösung in dem festgesetzten einfachen Rationalitätsbereich durchführbar ist.

Nach diesen Vorbereitungen gehen wir über zur **allgemeinen Teilung** durch Primzahlen:

Es sollen folgende Grössen in den Rationalitätsbereich aufgenommen werden:

1. $S(w)$ und $S'(w)$.
2. Rationale Zahlen.
3. Rationale Funktionen von α mit rationalen Koeffizienten.
4. Die Periodenteilwerte $S\left(\frac{\nu\,\omega_I + \nu'\,\omega_{III}}{n}\right)$ und ihre ersten Differentialquotienten $S'\left(\frac{\nu\,\omega_I + \nu'\,\omega_{III}}{n}\right)$.

Nun zeigen wir, dass die allgemeine Teilungsgleichung

$$10) \qquad S(w)\,.\,Q(x) - x\,.\,P(x) = 0$$

in diesem Körper gelöst werden kann und verwenden dazu den Satz[1]: „Eine irreduzible Gleichung mit kommutativer

[1]) Weber I. § 169.

Gruppe ist eine Abel'sche Gleichung." Von diesen wissen wir, dass sie im Rationalitätsbereich algebraisch lösbar sind.

1.° Beweis der Irreduzibilität: Dabei ist zu zeigen, dass die Teilungsgleichung keine in Bezug auf den festgesetzten Körper rationale Faktoren hat.

Die n^2 Wurzeln haben die Form

$$11) \qquad S\left(\frac{w}{n} + \frac{\nu\,\omega_I + \nu'\,w_{III}}{n}\right) = x_{\nu,\,\nu'}$$

und sind alle voneinander verschieden. Vergleicht man ihre Lage im Periodenparallelogramm [In Fig. 13 ist es für $n = 2$ durchgeführt], so erkennt man, dass sämtliche Wurzeln von einander verschieden sind. Besteht nun zwischen den Wurzeln irgend eine rationale Gleichung

$$12) \qquad F\left(S\left(\frac{w}{n}\right),\ S\,(w),\ S'\,(w)\right),$$

so kann darin w um Perioden $\nu\,\omega_I + \nu'\,\omega_{III}$ verändert werden. Dadurch nimmt $S\frac{w}{n}$ alle Werte 11) an, also alle Wurzeln der Teilungsgleichung, während $S\,(w)$ und $S'\,(w)$ konstant bleiben. Daher muss jede rationale Gleichung zwischen den Wurzeln

$$F\left(x,\ S\,(w),\ S'\,(w)\right)$$

mindestens alle Wurzeln enthalten. Die Teilungsgleichung ist irreduzibel.

2.° Aufstellung der Gruppe: Wir suchen die Vertauschungen, die ermöglichen die verschiedenen Wurzeln in einander überzuführen. Die Gesamtheit dieser Vertauschungen ist die Galois'sche Gruppe der Gleichung.

Wir denken uns die Wurzeln 11) $x_{\nu,\,\nu'}$ gefunden; dann lassen sich daraus nach § 12, 5[a])

$$13) \qquad S'\,(w) = x' \,.\, R'\,(x)$$

ihre ersten Differentialquotienten rational ableiten.

Da ferner $S\left(\frac{\nu\,\omega_I + \nu'\,\omega_{III}}{n}\right)$ und $S'\left(\frac{\nu\,\omega_I + \nu'\,\omega_{III}}{n}\right)$ im Körper enthalten sind, so ist nach § 12, 2[a])

$$S\left(\frac{w}{n}+\frac{r\,\omega_{\mathrm{I}}+s\,\omega_{\mathrm{III}}}{n}\right)=\frac{\left\{S\left(\frac{w}{n}+\frac{\nu\,\omega_{\mathrm{I}}+\nu'\,\omega_{\mathrm{III}}}{n}\right)\cdot S'\left(\frac{\mu\,\omega_{\mathrm{I}}+\mu'\,\omega_{\mathrm{III}}}{n}\right)+\right.}{4\,S\left(\frac{w}{n}+\frac{\nu\,\omega_{\mathrm{I}}+\nu'\,\omega_{\mathrm{III}}}{n}\right)\cdot S\left(\frac{\mu\,\omega_{\mathrm{I}}+\mu'\,\omega_{\mathrm{III}}}{n}\right)\cdot}$$

$$\left.+S\left(\frac{\mu\,\omega_{\mathrm{I}}+\mu'\,\omega_{\mathrm{III}}}{n}\right)\cdot S'\left(\frac{w}{n}+\frac{\nu\,\omega_{\mathrm{I}}+\nu'\,\omega_{\mathrm{III}}}{n}\right)\right\}^2$$

$$\cdot\left|1-S\left(\frac{w}{n}+\frac{\nu\,\omega_{\mathrm{I}}+\nu'\,\omega_{\mathrm{III}}}{n}\right)\cdot S\left(\frac{\mu\,\omega_{\mathrm{I}}+\mu'\,\omega_{\mathrm{III}}}{n}\right)\right|^2.$$

worin $r=\nu+\mu$ und $s=\nu'+\mu'$ ist, eine rationale Gleichung. Wird unter $\mathfrak{f}_{\mu,\,\mu'}$ eine rationale Funktion verstanden, die nur von dem Periodenteilwert $x_{\mu,\,\mu'}$ und seinem 1. Differentialquotienten abhängt, so kann symbolisch geschrieben werden

14) $$x_{\nu+\mu,\,\nu'+\mu'}=\mathfrak{f}_{\mu,\,\mu'}(x_{\nu,\,\nu'}).$$

Setzt man noch fest, dass sämtliche Indizes nach dem Modul n genommen werden, so stellt diese Gleichung die Vertauschungen unter den Wurzeln der Teilungsgleichung dar. Wir erhalten alle Vertauschungen, wenn wir die Indizes ν, ν' festhalten und um μ, μ' vermehren.

Bezeichnet man eine solche Vertauschung mit $V_{\mu,\,\mu'}$, so erhalten wir den Satz: Die Galoissche Gruppe der Teilungsgleichung besteht aus den n^2 Vertauschungen $V_{\mu,\,\mu'}$.

Sind $V_{\nu,\,\nu'}$ und $V_{\mu,\,\mu'}$ zwei Vertauschungen, so ergeben beide nacheinander angewendet

$$V_{\nu,\,\nu'}\cdot V_{\mu,\,\mu'}=V_{\nu+\mu,\,\nu'+\mu'}$$

$$V_{\mu,\,\mu'}\cdot V_{\nu,\,\nu'}=V_{\nu+\mu,\,\nu'+\mu'},$$

d. h. die Reihenfolge der Vertauschungen ist gleichgültig. Die Galois'sche Gruppe ist kommutativ.

Aus 1.° und 2.° folgt:

Die Teilungsgleichung ist eine Abel'sche Gleichung und somit algebraisch lösbar.

§ 18.

Zurückführung der speziellen Teilungsgleichung auf Transformationsgleichungen.

In den letzten Paragraphen haben wir gesehen, dass die Teilung für jedes n gelöst werden kann. Wir treten nun näher an die Auflösung heran. Dabei beschränken wir uns auf die spezielle Teilung durch Primzahlen [2 ausgenommen].

Dann ist nach § 14, 3) die Gleichung

$$1) \qquad x \cdot P(x) = 0$$

zu lösen, deren Grad nach § 17, 2) $\frac{n^2 - 1}{2}$ beträgt.

Wir denken uns die Wurzeln gefunden und ordnen je gleichviel in Systeme oder Reihen. Nun bilden wir symmetrische Funktionen, die je sämtliche Wurzeln einer Reihe darstellen. Eine Gleichung, die diese Funktionen als Wurzeln hat heisst Transformationsgleichung.[1]) Die Wurzeln dieser Gleichung und sie selbst sind von niedrigerem Grad als die Teilungsgleichung, und wir haben statt der Lösung einer Gleichung vom Grad $\frac{n^2 - 1}{2}$ eine Anzahl Gleichungen, deren Grade Teiler von $\frac{n^2 - 1}{2}$ sind, zu lösen. Zur Unterscheidung von den x seien die Wurzeln der Transformationsgleichung mit $\beta_0, \beta_1, \ldots$ bezeichnet.

Wir treffen eine möglichst einfache Wahl:

1.° Die Wurzeln x einer Reihe sollen nach der Multiplikationsgleichung § 12, 3ª) aus der ersten hervorgehen.

2.° Die Funktionen $\beta_0, \beta_1, \ldots$ seien je das Produkt der in einer Reihe enthaltenen Wurzeln x.

Diese Produkte erhalten dann folgende Form

$$2) \qquad \begin{gathered} S\left(\frac{\omega_I}{n}\right) \cdot S\left(\frac{2\,\omega_I}{n}\right) \cdot S\left(\frac{3\,\omega_I}{n}\right) \cdots \\ S\left(\frac{r\,\omega_I + \omega_{III}}{n}\right) \cdot S\left(2\frac{r\,\omega_I + \omega_{III}}{n}\right) \cdot S\left(3\frac{r\,\omega_I + \omega_{III}}{n}\right) \cdots \\ r = 0, 1, 2, \ldots \end{gathered}$$

[1]) Weber III. Siebenter Abschnitt.

Darin lässt sich jeder Faktor nach § 12, 3ª) rational aus dem ersten allein ableiten. Unter den Wurzeln der Transformationsgleichungen, die ich hier allein bestimmt habe, sollen solche Produkte verstanden sein.

Es handelt sich nun darum, bei gegebenem n die Anzahl der Wurzeln der Transformationsgleichung und damit ihren Grad zu bestimmen und anzugeben, wie viele Faktoren jede Wurzel enthält.

Zunächst sei der Fall $n = 5$ durchgeführt. Wir bilden die Produkte 2) und der Faktoren fort, bis wegen der Periodizität fahren mit der Bildung wieder der erste käme.

$$2^{a})\quad \begin{cases} 0.^{0}\ S\left(\frac{\omega_{III}}{5}\right)\cdot S\left(\frac{2\,\omega_{III}}{5}\right)\cdot S\left(\frac{3\,\omega_{III}}{5}\right)\cdot S\left(\frac{4\,\omega_{III}}{5}\right) \\ 1.^{0}\ S\left(\frac{\omega_{I}+\omega_{III}}{5}\right)\cdot S\left(2\cdot\frac{\omega_{I}+\omega_{III}}{5}\right)\cdot S\left(3\cdot\frac{\omega_{I}+\omega_{III}}{5}\right)\cdot S\left(4\cdot\frac{\omega_{I}+\omega_{III}}{5}\right) \\ 2.^{0}\ S\left(\frac{2\,\omega_{I}+\omega_{III}}{5}\right)\cdot S\left(2\cdot\frac{2\,\omega_{I}+\omega_{III}}{5}\right)\cdot S\left(3\cdot\frac{2\,\omega_{I}+\omega_{III}}{5}\right)\cdot S\left(4\cdot\frac{2\,\omega_{I}+\omega_{III}}{5}\right) \\ 3.^{0}\ S\left(\frac{3\,\omega_{I}+\omega_{III}}{5}\right)\cdot S\left(2\cdot\frac{3\,\omega_{I}+\omega_{III}}{5}\right)\cdot S\left(3\cdot\frac{3\,\omega_{I}+\omega_{III}}{5}\right)\cdot S\left(4\cdot\frac{3\,\omega_{I}+\omega_{III}}{5}\right) \\ 4.^{0}\ S\left(\frac{4\,\omega_{I}+\omega_{III}}{5}\right)\cdot S\left(2\cdot\frac{4\,\omega_{I}+\omega_{III}}{5}\right)\cdot S\left(3\cdot\frac{4\,\omega_{I}+\omega_{III}}{5}\right)\cdot S\left(4\cdot\frac{4\,\omega_{I}+\omega_{III}}{5}\right) \\ 5.^{0}\ S\left(\frac{\omega_{I}}{5}\right)\cdot S\left(\frac{2\,\omega_{I}}{5}\right)\cdot S\left(\frac{3\,\omega_{I}}{5}\right)\cdot S\left(\frac{4\,\omega_{I}}{5}\right) \end{cases}$$

Aus Figur 16 ersieht man, dass die Argumente einer Zeile je auf Geraden durch den Anfangspunkt liegen. Bei der Zeile 2°,

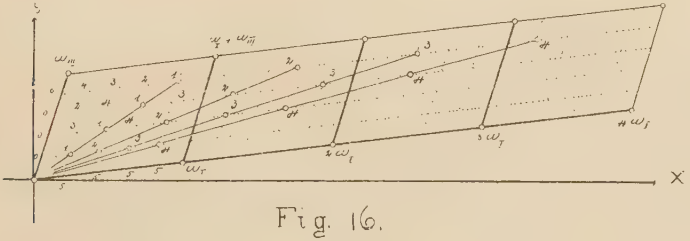

Fig. 16.

3° und 4° fallen Argumente ausserhalb des Fundamentalperiodenparallelogramms. Für diese nehmen wir die korrespondierenden Werte in demselben und erhalten

$$3)\begin{cases} 2.^{\circ}\ S\left(\frac{2\omega_I + \omega_{III}}{5}\right)\cdot S\left(\frac{4\omega_I + 2\omega_{III}}{5}\right)\cdot S\left(\frac{\omega_I + 3\omega_{III}}{5}\right)\cdot S\left(\frac{3\omega_I + 4\omega_{III}}{5}\right) \\ 3.^{\circ}\ S\left(\frac{3\omega_I + \omega_{III}}{5}\right)\cdot S\left(\frac{\omega_I + 2\omega_{III}}{5}\right)\cdot S\left(\frac{4\omega_I + 3\omega_{III}}{5}\right)\cdot S\left(\frac{2\omega_I + 4\omega_{III}}{5}\right) \\ 4.^{\circ}\ S\left(\frac{4\omega_I + \omega_{III}}{5}\right)\cdot S\left(\frac{3\omega_I + 2\omega_{III}}{5}\right)\cdot S\left(\frac{2\omega_I + 3\omega_{III}}{5}\right)\cdot S\left(\frac{\omega_I + 4\omega_{III}}{5}\right). \end{cases}$$

Daraus erkennt man, dass die Produkte 0° bis 4° in folgende Form zusammengefasst werden können

$$4)\qquad \prod_{\nu=\nu'=1}^{4} S\left(\frac{r\nu\,\omega_I + \nu'\,\omega_{III}}{5}\right),\quad r = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,$$

worin die Faktoren von ω_I mod 5 zu nehmen sind, und 5° kann geschrieben werden

$$5)\qquad \prod_{\nu=1}^{4} S\left(\frac{\nu\,\omega_I}{5}\right).$$

Nach § 16, 3) sind in jedem Produkt nur zwei verschiedene Faktoren. Daher seien als Wurzeln der Transformationsgleichung für $n = 5$ folgende 6 Werte gewählt:

$$6)\qquad \begin{aligned} \beta_r &= \prod_{\nu=\nu'=1}^{2} S\left(\frac{r\nu\,\omega_I + \nu'\,\omega_{III}}{5}\right),\ \left(r = 0,\ 1,\ \ldots 4\right), \\ &\qquad\qquad r\nu \bmod 5. \\ \beta_5 &= \prod_{\nu=1}^{2} S\left(\frac{\nu\,\omega_I}{5}\right). \end{aligned}$$

Im allgemeinen Falle ergeben sich durch den Schluss von n auf $n+1$ folgende Eigenschaften der Transformationsgleichung:

1.° Ihr Grad ist $n+1$.

2.° Ihre Wurzeln sind Produkte von Wurzeln der Teilungsgleichung, deren Faktorenzahl $\frac{n-1}{2}$ beträgt.

3.° Die Wurzeln haben die Form

$$\beta_r = \prod_{\nu=\nu'=1}^{\frac{n-1}{2}} S\left(\frac{r\,\nu\,\omega_I + \nu'\,\omega_{III}}{n}\right),$$

$$\beta_n = \prod_{\nu=1}^{\frac{n-1}{2}} S\left(\frac{\nu\,\omega_I}{n}\right),$$

worin $r = 0, 1, 2 \ldots (n-1)$ und r, ν modulo n zu nehmen sind.

§ 19.

Darstellung der Wurzeln der Transformationsgleichung durch unendliche Produkte.

Am Schlusse des letzten Paragraphen haben wir die Eigenschaften besonderer Transformationsgleichungen und ihrer Wurzeln aufgestellt und wollen jetzt diese Wurzeln näher bestimmen, indem wir sie durch unendliche Produkte [vergleiche § 3, 3)] ausdrücken. Wir gehen denselben Weg, auf dem Kiepert zur Darstellung der Wurzeln von Transformationsgleichungen für die einfache Funktion σ gelangt ist.[1])

Dabei stützen wir uns auf die Definition von $\mathfrak{S}(u)$ durch die beiden Sigmafunktionen $\sigma(u)$ und $\sigma_3(u)$ und verwenden die beiden Gleichungen[2])

$$\sigma(2\omega_1 v) = \frac{2\omega_1}{\pi} \cdot e^{a v^2} \cdot \frac{z - z^{-1}}{2i} \cdot \frac{\prod_{\nu=1}^{\infty}(1 - h^{2\nu} \cdot z^2) \cdot \prod_{\nu=1}^{\infty}(1 - h^{2\nu} \cdot z^{-2})}{\prod_{\nu=1}^{\infty}(1 - h^{2\nu})^2}$$

und

$$\sigma_3(2\omega_1 v) = e^{2\eta_1 \omega_1 v^2} \cdot \frac{\prod_{\nu=1}^{\infty}(1 - h^{2\nu-1} \cdot z^2) \cdot \prod_{\nu=1}^{\infty}(1 - h^{2\nu-1} \cdot z^{-2})}{\prod_{\nu=1}^{\infty}(1 - h^{2\nu-1})^2},$$

die für unsere Bezeichnungen umgeschrieben lauten

[1]) Crelle Journal Bd. 87, pag. 199.

[2]) Burkhardt pag. 58, 23) und pag. 81, 6).

1) $$\sigma(u) = \frac{\omega_1}{\pi} \cdot e^{\frac{\eta_1 u^2}{\omega_1}} \cdot \frac{z - z^{-1}}{2i} \cdot \prod_{\nu=1}^{\infty} \frac{(1 - h^{2\nu} \cdot z^2)(1 - h^{2\nu} \cdot z^{-2})}{(1 - h^{2\nu})^2},$$

2) $$\sigma_3(u) = e^{\frac{\eta_1 u^2}{\omega_1}} \cdot \prod_{\nu=1}^{\infty} \frac{(1 - h^{2\nu-1} \cdot z^2)(1 - h^{2\nu-1} \cdot z^{-2})}{(1 - h^{2\nu-1})^2},$$

worin

$$z = e^{\frac{u}{\omega_1} \cdot \pi i}, \qquad h = e^{\frac{\omega_3}{\omega_1} \cdot \pi i}.$$

Daraus erhalten wir durch Division

3) $$\mathfrak{S}(u) = \frac{\omega_1}{\pi} \cdot \frac{z - z^{-1}}{2i} \cdot \prod_{\nu=1}^{\infty} \frac{(1 - h^{2\nu} \cdot z^2)(1 - h^2 \cdot z^{-2})(1 - h^{2\nu-1})^2}{(1 - h^{2\nu-1} \cdot z^2)(1 - h^{2\nu-1} \cdot z^{-2})(1 - h^{2\nu})^2}.$$

Von $\mathfrak{S}\, u$ gehen wir über zu

$$S(w) = \frac{\mathfrak{S}^2(u)}{\varepsilon_1 \varepsilon_2}.$$

Nach § 3, 4) und 3*) ist

$$\varepsilon_1 \varepsilon_2 = \frac{\omega_1^2}{4\pi^2} \cdot \frac{h^{\frac{1}{2}}}{H^4_{(2\nu)} \cdot H^4_{2\nu} \cdot H^4_{2\nu-1}} = \frac{\omega_1^2}{4\pi^2} \cdot \frac{h^{\frac{1}{2}} H^4_{-(2\nu-1)}}{H^4_{2\nu}},$$

und somit

4) $$S(w) = (z - z^{-1})^2 \cdot h^{\frac{1}{2}} \cdot \prod_{\nu=1}^{\infty} \frac{(1 - h^{2\nu} \cdot z^2)^2 \cdot (1 - h^{2\nu} \cdot z^{-2})^2}{(1 - h^{2\nu-1} \cdot z^2)^2 \cdot (1 - h^{2\nu-1} \cdot z^{-2})^2}.$$

Setzen wir für w die Werte $\frac{\nu\, \omega_{\mathrm{I}} + \nu'\, \omega_{\mathrm{III}}}{n}$, so ergeben sich sämtliche Wurzeln der Periodenteilungsgleichung ausgedrückt durch unendliche Produkte, woraus sich wieder durch Multiplikation die Wurzeln der Transformationsgleichung ergeben.

Wir betrachten zunächst den einfachsten Fall $n = 3$. Dann hat die Teilungsgleichung neben 0 die vier verschiedenen Wurzeln

5) $$x_{01} = S\frac{\omega_{\mathrm{III}}}{3}, \quad x_{11} = S\frac{\omega_{\mathrm{I}} + \omega_{\mathrm{III}}}{3}, \quad x_{21} = S\frac{2\,\omega_{\mathrm{I}} + \omega_{\mathrm{III}}}{3}, \quad x_{10} = S\frac{\omega_{\mathrm{I}}}{3}.$$

[Vergleiche Figur 17].

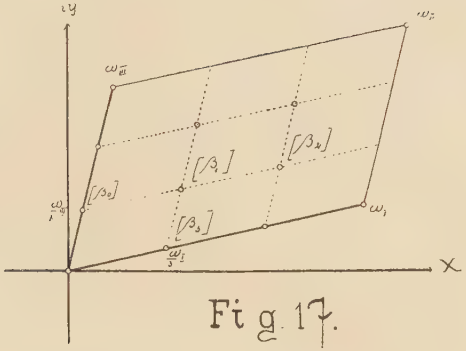

Fig. 17.

Nach den Ergebnissen des letzten Paragraphen hat für $n = 3$. die Transformationsgleichung den Grad 4 und jede Wurzel nur einen Faktor. Also sind die Grössen 5) direkt die Wurzeln der Transformationsgleichung, und zwar ist

6) $$\underbrace{\beta_0 = x_{01}, \quad \beta_1 = x_{11}, \quad \beta_2 = x_{21}}; \quad \beta_3 = x_{10}.$$
$$\beta_r = x_{r,1}, \quad r = 0, 1, 2.$$

Wird noch zur Abkürzung $e^{\frac{2\pi i}{3}} = \delta$ gesetzt, so ist nach 4)

$$\beta_r = -h^{\frac{1}{2}} \cdot (h^{\frac{1}{3}} \cdot \delta^{\frac{r}{2}} - h^{-\frac{1}{3}} \cdot \delta^{-\frac{r}{2}})^2 \cdot$$

$$\Pi^2 \frac{(1 - h^{2\nu + \frac{2}{3}} \cdot \delta^r)(1 - h^{2\nu - \frac{2}{3}} \cdot \delta - r)}{(1 - h^{2\nu - 1 + \frac{2}{3}} \cdot \delta^r) \cdot (1 - h^{2\nu - 1 - \frac{2}{3}} \cdot \delta - r)} \cdot$$

$$\beta_3 = +h^{\frac{1}{2}} 4 \cdot \left(\frac{e^{\frac{\pi i}{3}} - e^{-\frac{\pi i}{3}}}{2i}\right)^2 \cdot$$

$$\Pi^2 \frac{(1 - h^{2\nu} \cdot \delta)(1 - h^{2\nu} \cdot \delta - 1)}{(1 - h^{2\nu - 1} \cdot \delta)(1 - h^{2\nu - 1} \cdot \delta - 1)}$$

oder, da in der Gleichung der Einheitswurzeln $x^n - 1 = 0$ alle Koëffizienten bis auf den ersten und letzten Null sind,

$$\beta_r = -h^{-\frac{1}{6}} \cdot \delta^{-r} (1 - h^{\frac{2}{3}} \cdot \delta^r)^2 \cdot$$

$$\cdot \Pi^2 \frac{\left(1 - h^{2\nu - \frac{2}{3}} \cdot \delta^{2r\nu}\right)\left(1 - h^{2\nu}\right)\left(1 - h^{2\nu + \frac{2}{3}} \cdot \delta^{r\nu}\right) \cdot \left(1 - h^{2\nu - 1}\right)}{\left(1 - h^{2\nu - \frac{5}{3}} \cdot \delta^{2r\nu}\right)\left(1 - h^{2\nu - 1}\right)\left(1 - h^{2\nu - \frac{1}{3}} \cdot \delta^{r\nu}\right) \cdot \left(1 - h^{2\nu}\right)},$$

7)
$$\beta_r = -h^{-\frac{1}{6}} \cdot \delta^{-r} \cdot \frac{H^2_{-(2\nu-1)}}{H^2_{-(2\nu)}} \cdot \Pi^2 \frac{\left(1 - h^{\frac{2\nu}{3}} \cdot \delta^{r\nu}\right)}{\left(1 - h^{\frac{2\nu-1}{3}} \cdot \delta^{-r(2\nu-1)}\right)},$$

8)
$$\beta_3 = +3 \cdot h^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{H^2_{-(2\nu-1)}}{H^2_{-(2\nu)}} \cdot \Pi^2 \frac{(1 - h^{3 \cdot 2\nu})}{(1 - h^{3(2\nu-1)})}.$$

Es ergibt sich hier sofort eine Probe, indem nach § 13, 7) das Produkt sämtlicher Wurzeln der Periodenteilungsgleichung n^2 beträgt. Da wir hier von je 2 gleichen Wurzeln nur die eine berücksichtigt haben, werden wir als Produkt $+n$ erhalten § 10, 33a).

Bei der Ausführung berechnen wir zuerst nur die unendlichen Produkte unter den Produktzeichen und zwar den Zähler:

$$\left(1 - h^{\frac{2\nu}{3}}\right)\left(1 - h^{\frac{2\nu}{3}} \cdot \delta^{\nu}\right)\left(1 - h^{\frac{2\nu}{3}} \cdot \delta^{2\nu}\right)\left(1 - h^{\frac{4\nu}{3}}\right)\left(1 - h^{\frac{4\nu}{3}} \cdot \delta^{2\nu}\right) \cdot$$

$$\cdot \left(1 - h^{\frac{4\nu}{3}} \cdot \delta^{4\nu}\right)\left(1 - h^{2\nu}\right)\left(1 - h^{2\nu}\right)\left(1 - h^{2\nu}\right)\left(1 - h^{3 \cdot 2\nu}\right) =$$

$$= \left(1 - h^{2\nu}\right) \cdot \left(1 - h^{4\nu}\right) \cdot \left(1 - h^{6\nu}\right) \cdot \left(1 - h^{2\nu}\right)^3 = \left(1 - h^{2\nu}\right)^4.$$

Berechnet man den Nenner in ähnlicher Weise, so wird

$$\beta_0 \cdot \beta_1 \cdot \beta_2 \cdot \beta_3 = -3 \frac{H^8_{-(2\nu-1)}}{H^8_{-(2\nu)}} \cdot \Pi^2 \frac{(1 - h^{2\nu})}{(1 - h^{2\nu-1})}$$

und nach der Definition der H

9)
$$\prod_{\mu=0}^{3} \beta_\mu = -3.$$

Nun gehen wir über zum Fall $n = 5$ und betrachten die Figur 16. Wir haben 12 verschiedene Wurzeln der Teilungsgleichung [Vergleiche auch § 12, 10)] und erhalten daraus die 6 Wurzeln der Transformationsgleichung:

10)
$$\left.\begin{aligned} \beta_0 &= x_{0,1} \cdot x_{0,2} \\ \beta_1 &= x_{1,1} \cdot x_{2,2} \\ \beta_4 &= x_{4,1} \cdot x_{3,2} \\ \beta_5 &= x_{1,0} \cdot x_{2,0}, \end{aligned}\right\} \quad \beta_r = x_{r,1} \cdot x_{2r,2},$$

und wenn $e^{\frac{2\pi i}{5}} = \delta$ gesetzt wird

$$\beta_r = h \cdot (h^{\frac{1}{5}} \cdot \delta^{2r} - h^{-\frac{1}{5}} \cdot \delta^{-2r})^2 (h^{\frac{2}{5}} \cdot \delta^{r} - h^{-\frac{2}{5}} \cdot \delta^{-r})^2$$

$$\cdot \Pi^2 \frac{(1 - h^{2\nu + \frac{2}{5}} \cdot \delta^{r\nu})(1 - h^{2\nu - \frac{2}{5}} \cdot \delta^{-r\nu})(1 - h^{2\nu + \frac{4}{5}} \cdot \delta^{2r\nu})}{(1 - h^{2\nu - 1 + \frac{2}{5}} \cdot \delta^{r\nu})(\ldots)(\ldots)}$$

$$\cdot \frac{(1 - h^{2\nu - \frac{4}{5}} \cdot \delta^{-2r\nu})}{(\ldots)}.$$

11)
$$\beta_r = h \cdot h^{-\frac{6}{5}} \cdot \delta^{3r} \cdot \frac{H^2_{-(2\nu-1)}}{H^2_{-(2\nu)}} \cdot \Pi^2 \frac{(1 - h^{\frac{2\nu}{5}} \cdot \delta^{r\nu})}{(1 - h^{\frac{2\nu-1}{5}} \cdot \delta^{-r(2\nu-1)})};$$

$$\beta_5 = h \cdot 16 \cdot \left(\frac{e^{\frac{\pi i}{5}} - e^{-\frac{\pi i}{5}}}{2i}\right)^2 \cdot \left(\frac{e^{\frac{2\pi i}{5}} - e^{-\frac{2\pi i}{5}}}{2i}\right)^2 \cdot$$

$$\cdot \Pi^2 \frac{(1 - h^{2\nu} \cdot \delta)(1 - h^{2\nu} \cdot \delta^{-1})(1 - h^{2\nu} \cdot \delta^{2})(1 - h^{2\nu} \cdot \delta^{-2})(1 - h^{2\nu-1})}{(1 - h^{2\nu-1} \cdot \delta)(\ldots)(\ldots)(\ldots)(1 - h^{2\nu})}.$$

Da $16 \cdot \sin^2 \frac{\pi}{5} \cdot \sin^2 \frac{2\pi}{5} = 5$ wird

12)
$$\beta_5 = h \cdot 5 \cdot \frac{H^2_{-(2\nu-1)}}{H^2_{-(2\nu)}} \cdot \Pi^2 \frac{(1 - h^{5 \cdot 2\nu})}{(1 - h^{5(2\nu-1)})}.$$

Nach diesen Vorbereitungen lässt sich durch einfache Fortsetzung derselben Ueberlegungen schliessen, dass man bei einem beliebigen n folgende Werte erhält:

$$h = e^{\frac{\omega_{III}}{\omega_I} \cdot \pi i}, \qquad \delta = e^{\frac{2\pi i}{n}},$$

$$2^{n-1} \sin^2 \frac{\pi}{n} \cdot \sin^2 \frac{2\pi}{n} \cdot \ldots \cdot \sin^2 \left(\frac{n-1}{2} \cdot \frac{\pi}{n} \right) = n.$$

13) $$\beta_r = -h^{\frac{n-1}{2}} \cdot h^{\frac{2}{n} + \frac{4}{n} + \cdots + \frac{n-1}{n}} \cdot \delta^{r\left(1 \cdot 2 \cdots \frac{n-1}{2}\right)} \cdot$$

$$\cdot \frac{H^2_{(2\nu-1)}}{H^2_{(2\nu)}} \cdot \prod_{\nu=1}^{\infty} \frac{\left(1 - h^{\frac{2\nu}{n}} \cdot \delta^{r\nu}\right)}{\left(1 - h^{\frac{2\nu-1}{n}} \cdot \delta^{r(2\nu-1)}\right)} \cdot$$

$$r = 0, 1, 2 \ldots (n-1).$$

14) $$\beta_n = n \cdot h^{\frac{n-1}{2}} \cdot \frac{H^2_{(2\nu-1)}}{H^2_{(2\nu)}} \cdot \prod_{\nu=1}^{\infty} \frac{(1 - h^{n \cdot 2\nu})}{(1 - h^{n(2\nu-1)})}.$$

Als Probe ergibt sich

15) $$\prod_{\mu=0}^{n} \beta_\mu = (-1)^{\frac{n-1}{2}} n.$$[1])

Diese Gleichungen liefern das gesuchte Werkzeug, um jede Wurzel aus dem Periodenverhältnis zu berechnen.

§ 20.

Die Transformationsgleichung für $n = 3$.

Das nächste Ziel ist die wirkliche Aufstellung der Transformationsgleichung, indem man ihre Koeffizienten aus den symmetrischen Funktionen der Wurzeln berechnet. Das konstante Glied lässt sich als Produkt sämtlicher Wurzeln sofort angeben § 19, 15). Für die andern Koeffizienten sind die unendlichen Produkte § 19, 13) und 14) in Reihen zu entwickeln, und berücksichtigt man genügend Glieder, so müssen die gewünschten Werte

[1]) Das Vorzeichen wird durch § 10, 31) und 39a) bestimmt.

herauskommen. Als Beispiel sei der Fall $n = 3$ angeführt, in dem ich die Transformationsgleichung § 12, 8) und § 17, 2a) auf anderem Wege schon gefunden habe:

1) $$x^4 - 6x^2 + 4ax - 3 = 0.$$

Zur Auflösung werde die Euler'sche Methode verwendet. Dann ist die kubische Resolvente

$$z^3 + \mathfrak{C}_1 \cdot z^2 + \mathfrak{C}_2 \cdot z + \mathfrak{C}_3 = 0$$

mit den Koëffizienten

$$\mathfrak{C}_1 = -3, \qquad \mathfrak{C}_2 = 3, \qquad \mathfrak{C}_3 = -\frac{a^2}{4}, \text{ also}$$

2) $$z^3 - 3z^2 + 3z - \frac{a^2}{4} = 0,$$

$$(z-1)^3 = \frac{a^2}{4} - 1$$

und den Wurzeln

$$z_1 = 1 + \sqrt[3]{\frac{a^2}{4} - 1},$$

$$z_2 = 1 - \sqrt[3]{\frac{a^2}{4} - 1} \cdot \frac{1 - i\sqrt{3}}{2},$$

$$z_3 = 1 - \sqrt[3]{\frac{a^2}{4} - 1} \cdot \frac{1 + i\sqrt{3}}{2},$$

oder, wenn man ε_{I} und $\varepsilon_{\mathrm{III}}$ einführt,

$$z_1 = 1 + \sqrt[3]{\frac{(\varepsilon_{\mathrm{I}} - \varepsilon_{\mathrm{III}})^2}{4}}.$$

$$\vdots$$

Setzt man wieder $e^{\frac{2\pi i}{3}} = \delta$, so sind die Wurzeln der Gleichung 1)

$$x_0 = -\sqrt{1 + \sqrt[3]{\frac{a^2}{4} - 1}} + \sqrt{1 + \sqrt[3]{\frac{a^2}{4} - 1}} \cdot \delta + \sqrt{1 + \sqrt[3]{\frac{a^2}{4} - 1}} \cdot \delta^2$$

4)

$$x_1 = + W_1 - W_2 + W_3$$

$$x_2 = + W_1 + W_2 - W_3$$

$$x_3 = - W_1 - W_2 - W_3$$

Durch Bildung des Produktes ergibt sich eine Probe.

Es stellt sich nun die weitere Frage, welchem der vier β § 19, 6) je die vier Wurzeln x entsprechen. Die Entscheidung gibt die Entwicklung der Werte W_1, W_2, und W_3 nach h. Dabei können die höheren Potenzen von h vernachlässigt werden, und es ist nach § 8, 3)

$$a = \frac{h^{-\frac{1}{2}}}{4} + \ldots, \quad \frac{a^2}{4} - 1 = \frac{h^{-1}}{64} + \ldots,$$

$$W_1 = \sqrt{1 + \frac{h^{-\frac{1}{3}}}{4}} = 1 + \frac{h^{-\frac{1}{6}}}{2} + \ldots,$$

$$W_2 = \sqrt{1 + \frac{h^{-\frac{1}{3}}}{4} \cdot \delta} = 1 + \frac{h^{-\frac{1}{6}}}{2} \cdot \delta^2 + \ldots,$$

$$W_3 = \sqrt{1 + \frac{h^{-\frac{1}{3}}}{4} \cdot \delta^2} = 1 + \frac{h^{-\frac{1}{6}}}{2} \cdot \delta + \ldots.$$

Diese Wurzeln in 4) eingesetzt, gibt

$$x_0 = 1 + \frac{h^{-\frac{1}{6}}}{2} \cdot (1 + \delta^2 + \delta) = 1 + \frac{h^{-\frac{1}{6}}}{2} \cdot (2) = 1 \quad h^{-\frac{1}{6}},$$

$$x_0 = \pm h^{-\frac{1}{6}} \cdot (1 - h^{\frac{1}{6}}),$$

$$x_1 = \pm h^{-\frac{1}{6}} \cdot (1 - h^{\frac{1}{6}} \cdot \delta),$$

5)

$$x_2 = + h^{-\frac{1}{6}} \cdot (1 \quad h^{\frac{1}{6}} \cdot \delta^2),$$

$$x_3 = \pm 3.$$

Vergleicht man diese angenäherten Resultate mit den Wurzeln 7) und 8) des letzten Paragraphen, so erkennt man leicht, dass die x und β mit denselben Indizes miteinander übereinstimmen.

Damit ist für $n = 3$ die spezielle Teilung vollständig durchgeführt und so an einem Beispiel die Teilung durch ein ungerades n veranschaulicht.

[Vergleiche auch Figur 17.]

In den obigen Ableitungen war n immer als ganze reelle Zahl vorausgesetzt, und nur unter dieser Annahme habe ich die erhaltenen Sätze bewiesen.

Lässt man jetzt diese Bedingung fallen und betrachtet n als komplexe Zahl [aus einem quadratischen Zahlkörper], so ergibt sich als weitere Aufgabe die Durchführung der komplexen Multiplikation.

Schlusswort.

In kurzen Worten soll angedeutet werden, was ich bis dahin erreicht habe, und in welcher Richtung diese vorläufig abgeschlossene Arbeit erweitert werden kann.

Der erste Teil zeigt, dass ausgehend von den Sigmafunktionen die elementarsten funktionentheoretischen Eigenschaften der elliptischen Funktionen in einfacher Weise gefunden werden können.

Im zweiten Teil ist daran das algebraische Problem der reellen Multiplikation und Teilung angeschlossen, und wir finden, dass die erhaltenen Gleichungen sich eng anlehnen an die in der Theorie der Jacobi'schen elliptischen Funktionen hergeleiteten Formeln;[1]) daneben steht die Funktion $S(w)$ in naher Beziehung zu der Weierstrass'schen p-Funktion. Die S-Funktion nimmt eine Zwischenstellung ein zwischen der p-Funktion und der Sinusamplitude. Sie ist eine gerade Funktion wie die p-Funktion und zeigt dieselbe Periodizität, hat aber zugleich die vorteilhafte Eigenschaft der Sinusamplitude, dass ihr Multiplikationstheorem relativ einfache Gleichungen liefert.

Die komplexe Multiplikation steht ebenfalls in der Mitte zwischen der komplexen Multiplikation der erwähnten Funktionen. Da wir nun aber im Gegensatz zur p-Funktion die „arithmetische Natur der Multiplikationsformeln" aus der obigen Rechnung kennen, so lässt sie sich in gleicher Weise durchführen wie bei der Sinusamplitude, speziell der von Jacobi[2]) eingeführten und von Kronecker[3]) und H. Weber behandelten Funktion $\sqrt{x}\ sn\left(\frac{w}{\sqrt{x}}\right)$. Die komplexe Multiplikation dieser Funktion hat H. Weber im 50. Band der Mathematischen Annalen und im III. Band seiner Algebra dargelegt.

[1]) Ueber Lit. vergl. Einleitung.

[2]) Jacobi: „Suite des notices sur les fonctions elliptiques." Journal für Mathematik 4. Gesammelte Werke I. S. 266.

[3]) Kronecker: Monatsberichte der Berliner Academie 1886. S. 702 u. ff.

Mit der Herleitung der erwähnten Multiplikationsformeln ist der Hauptzweck dieser Arbeit erfüllt, doch lässt sie sich noch in verschiedener Richtung ausdehnen.

1. Analog wie bei der Behandlung der Sinusamplitude noch die Kosinus- und Deltaamplitude mit in die Betrachtung hinein gezogen werden, so kann man neben S entsprechende Funktionen C und D einführen.

2. In ähnlicher Weise, wie es Sohncke, Kiepert und Schlaefli [1]) angegeben haben, müssen sich voraussichtlich auch hier Transformationsgleichungen finden lassen, die dann bei der komplexen Multiplikation zur Berechnung von Klassenvarianten dienen können.

3. Bei der komplexen Multiplikation lässt sich die Theorie der Dedekind'schen Ideale einführen, und dann wird es möglich sein, diese Gleichungen der komplexen Multiplikation als Beispiel zur Theorie der Zahlstrahlen[2]) zu behandeln.

Ich schliesse mit der Hoffnung, bald eines dieser Probleme in Angriff nehmen zu können.

[1]) Vergleiche Einleitung.

[2]) Fueter, die Theorie der Zahlstrahlen I, II, Crelle Bd. 130, 132.

Curriculum vitae.

Am 15. August 1884 wurde ich, *Hans Stohler* aus Basel, in Pratteln, meinem ursprünglichen Heimatorte geboren, als zweiter Sohn des Martin Stohler und der Elise geborene Jörin. Mein Vater, seines Berufs Geometer, war längere Zeit Regierungsrat des Kantons Baselland, nachher Grundbuchgeometer und Chef des Vermessungsbureau Baselstadt. In Pratteln besuchte ich die Primarschule und dann von dort die Bezirksschule Liestal.

Als der Beruf meinen Vater nach Basel rief, trat ich in die Realschule ein und verliess sie im Herbst 1903 nach Absolvierung des Maturitätsexamens. Einige Zeit später habe ich meine, seit der Bezirksschule durchgeführten Uebungen in Latein durch die Ergänzungsprüfung am Basler Gymnasium abgeschlossen.

Meiner Neigung folgend, verlegte ich mich seit dem Herbst 1903 auf das Studium der Astronomie, Mathematik, Physik und Chemie an der Universität Basel und bestand im Sommer 1907 in den letzten drei Fächern das Mittellehrerexamen.

Zu meiner weiteren Ausbildung trugen zahlreiche während der Ferien absolvierte militärische Kurse bei. Auch habe ich schon vor dem Mittellehrerexamen während zwei Jahren Uebungen im Italienischen bei Herrn Professor Tappolet mitgemacht und nachher Vorlesungen und Uebungen in Zoologie und Botanik besucht.

So ziemlich allgemein gerüstet trat ich im Frühjahr 1908 die Stelle eines Sekundarlehrers in Muttenz an und verlebte dort umgeben von biedern Kollegen und anhänglichen Schülern zwei schöne Jahre.

Da entschloss ich mich, meine Studien an der Universität Basel fortzusetzen und trat von der Schule zurück. Ich verlegte mich auf reine Mathematik und machte auf Anregung von Herrn Professor Dr. *Rud. Fueter* die vorliegende Arbeit in der Zeit vom Sommer 1910 bis Herbst 1911.

Meine Universitätslehrer waren die Herren Professoren Dr. Fr. Fichter, A. Fischer, R. Flatt, R. Fueter, M. Grossmann, E. Hagenbach-Bischoff †, A. Hagenbach, Fr. Heman, H. Kinkelin, K. E. Reinle, A. Riggenbach, H. Rupe, G. Senn, O. Spiess, E. Tappolet, H. Veillon, K. Von der Mühll, Fr. Zschokke. Für die reichen Belehrungen sage ich meinen verehrten Lehrern herzlichen Dank.